Άλγεβρα Α΄ Λυκείου
Ρίζες Πραγματικών Αριθμών
5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

1. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\sqrt{16}+\sqrt{0,04}+\sqrt{0,64}=5$

   (β΄) $\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}=2$

   (γ΄) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9$

   (δ΄) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=6$

   (ε΄) $\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{3}$

   (ϛ΄) $\sqrt{20}+\sqrt{5}=\sqrt{45}$

   (ζ΄) $\sqrt{50}-\sqrt{18}-\sqrt{8}=0$

   (η΄) $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{12}}=3$

Σημείωση

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$

$\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

2. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1$

   (β΄) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)=2$

   (γ΄) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{5}}=5$

   (δ΄) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}=1$

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$.

3. Αν $x=2+\sqrt{3}$ και $y=2-\sqrt{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

   (α΄) xy (β΄) x^2+y^2 (γ΄) x^2-y^2 (δ΄) x^3+y^3 (ε΄) x^4-y^4

4. (α΄) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(2+\sqrt{5})^2 \text{ και } (2-\sqrt{5})^2.$$

   (β΄) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=4.$$

5. Αν $\alpha<0$ και $\beta>0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

   (α΄) $\sqrt{\alpha^2\beta^2}$ (β΄) $\sqrt{\alpha^4\beta^2}$

Σημείωση

Αν $\beta \geq 0$, $\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}$

6. Αν $1<x<3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=2.$$

7. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\mathrm{A} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = 2 + \sqrt{3}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = 1$.

(β΄) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$.

(Τράπεζα θεμάτων)

8. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$.
Να αποδείξτε ότι:

(α΄) $\mathrm{A} > 0$ (β΄) $\mathrm{A}^2 = 2$ (γ΄) $\mathrm{A} = \sqrt{2}$

9. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = 4$

(β΄) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} = 4\sqrt{2}$

10. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(α΄) $\sqrt[5]{1}$ (δ΄) $\sqrt[5]{32}$ (ζ΄) $\sqrt[3]{0,001}$

(β΄) $\sqrt[4]{16}$ (ε΄) $\sqrt[3]{125}$ (η΄) $\sqrt[3]{0,027}$

(γ΄) $\sqrt[3]{64}$ (ϛ΄) $\sqrt[3]{1000}$ (θ΄) $\sqrt[4]{0,0016}$

Ορισμός

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$

11. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\dfrac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = 2$

(β΄) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}-1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+1} = 4$

Σημείωση

Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = |\alpha|$

12. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(β΄) $\sqrt{25\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5 \cdot \sqrt[8]{5^3}$

(γ΄) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[6]{3^5}$

(δ΄) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5} = 5$

(ε΄) $\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^8} = 8$

(ϛ΄) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{32} = 4$

Σημείωση

Αν $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

13. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A} = \left(\sqrt{2}\right)^6, \ \mathrm{B} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \ \text{και} \ \Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 23$.

(β΄) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Σημείωση

$\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

(Τράπεζα θεμάτων)

¨Οι νόμοι της φύσης είναι οι μαθηματικές σκέψεις του Θεού¨
Ευκλείδης, 4-3ος αιώνας π.Χ., Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός.