

Το Θέμα της Εβδομάδας

Όρια-Συνέχεια Συνάρτησης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 9ο. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\kappa - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = \frac{1}{2}$.

(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ετερόσημοι αριθμοί α και β τέτοιои, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

(γ) Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + x + \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1}.$

Λύση. (α) Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής και στο $x = 0$.
Οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2\kappa - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow \\ 2\kappa - 1 &= 1 - 1 \Leftrightarrow \\ \kappa &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} - 1 & , \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha < 0$ και $\beta > 0$. Τότε:

$$f(\alpha) = \alpha^2 > 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) = \frac{\eta\mu\beta}{\beta} - 1 < 0,$$

διότι $\frac{\eta\mu\beta}{\beta} < 1$, αφού για $\beta > 0$ είναι $-\beta < \eta\mu\beta < \beta$.

Άρα, αν α και β ετερόσημοι, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

(γ) i.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1,$$

διότι:

για $x > 0$, ισχύει ότι $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$, αφού $|\eta\mu x| \leq 1$.

Άρα,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Οπότε, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

iii.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) + x + \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} \left(\frac{0}{0} \right) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x^2 + x + \eta\mu x)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 + x + \eta\mu x}{x} (\sqrt{x+1} + 1) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\left(x + 1 + \frac{\eta\mu x}{x} \right) (\sqrt{x+1} + 1) \right) \\ &= (0 + 1 + 1)(\sqrt{0+1} + 1) \\ &= 4. \end{aligned}$$