

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου
Επανάληψη Ενοτήτων 1.4-1.5
5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.
 (β) Αν $\frac{\pi}{2} < \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} < \pi$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.
 (γ) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
 (δ) Ισχύει ότι $\det(\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha}) = 2$.
 (ε) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.
 (ς) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.
 (ζ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.
 (η) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
 (θ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
 (ι) Αν το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 4$.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

- (α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
 (β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

- (α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$ είναι κάθετα, τότε ο πραγματικός αριθμός x είναι ίσος με
 (β) Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$ και $B(-3, 1)$. Αν το σημείο $M(x, y)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $x = \dots\dots\dots$ και $y = \dots\dots\dots$
 (γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα και ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ίσος με 4, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$ ισούται με
 (δ) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι

(ε) Αν τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, -9)$ και $\vec{\beta} = (-1, \lambda)$ είναι αντίρροπα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι ίσος με

Ασκήσεις

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{a}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{\beta}).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$.
- (β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.
- (γ) Αν $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και \vec{u} .
- (δ) Αν $\vec{w} = \vec{a} + \lambda\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα \vec{w} και $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

2. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.
Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

(α) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ (β) $\vec{AD} \cdot \vec{BG}$ (γ) $\vec{OD} \cdot \vec{AO}$ (δ) $\vec{OD} \cdot \vec{OB}$ (ε) $\vec{AD} \cdot \vec{GD}$.

3. Δίνονται τα σημεία: Α(3, 2), Β(-1, -2) και Γ(1, -3).

- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.
- (β) Αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
- (γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα \vec{AB} με τον άξονα $x'x$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, -1)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 1, \lambda)$ και $\vec{\gamma} = (1, 1)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
- (β) Αν $(\vec{a} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

5. Δίνονται τα σημεία:

$$A(3, 2) \quad \text{και} \quad B(-2, 3).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
- (β) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $y'y$, τέτοιο, ώστε τα σημεία Α, Μ και Β να είναι συνευθειακά.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (3, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$.

- (α) Να βρείτε το διάνυσμα \vec{v} το οποίο είναι ομόρροπο με το \vec{a} και έχει μέτρο ίσο με 10.
- (β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
- (γ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{a} και $\vec{\beta}$.
- (δ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{w} = (-7, 24)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα \vec{a} .

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger , 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.