

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 10ο. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + \ln(x+1)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0 + 1}.$$

(γ) Αν $\alpha \in (-1, x_0)$ και $\beta \in (x_0, +\infty)$, όπου x_0 ο πραγματικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{g(\alpha)}{1-\alpha} + \frac{g(\beta)}{\beta-2} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

(δ) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x) = g^2(x), \quad \text{για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$

Λύση.

(α) $D_g = (-1, +\infty)$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$, με $x_1 < x_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ e^{x_1} < e^{x_2}, \text{ αφού } e^x \uparrow \mathbb{R} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1), \text{ αφού } \ln x \uparrow (0, +\infty) \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{cases} \\ &\Rightarrow e^{x_1} + \ln(x_1 + 1) < e^{x_2} + \ln(x_2 + 1) \\ &\Rightarrow g(x_1) < g(x_2). \end{aligned}$$

Οπότε, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

Επίσης, η συνάρτηση g είναι συνεχής συνάρτηση στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Το σύνολο τιμών της είναι

$$g(((-1, +\infty))) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R},$$

αφού

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^x + \ln(x+1)) &= -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^x) = \frac{1}{e} \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (\ln(x+1)) &= \lim_{x+1=u} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln(x+1)) &= +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty \text{ και} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1)) &= \lim_{x+1=u} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty. \end{aligned}$$

(β) Αν $x_0 > -1$, τότε:

$$\begin{aligned} e^{x_0} &= \ln\left(\frac{1}{x_0+1}\right) \Leftrightarrow e^{x_0} = \ln 1 - \ln(x_0+1) \\ &\Leftrightarrow e^{x_0} = -\ln(x_0+1) \\ &\Leftrightarrow e^{x_0} + \ln(x_0+1) = 0. \end{aligned}$$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Επειδή $0 \in g((-1, +\infty))$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

(γ) Η εξίσωση $\frac{g(\alpha)}{1-x} + \frac{g(\beta)}{x-2} = 0$, στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ είναι ισοδύναμη, δηλαδή έχει τις ίδιες ρίζες, με την εξίσωση

$$(1-x)(x-2) \left(\frac{g(\alpha)}{1-x} + \frac{g(\beta)}{x-2} \right) = 0 \Leftrightarrow (x-2)g(\alpha) + (1-x)g(\beta) = 0.$$

Έστω $h(x) = (x-2)g(\alpha) + (1-x)g(\beta)$, $x \in [1, 2]$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική και

$$h(1) = -g(\alpha) > 0,$$

αφού $-1 < \alpha < x_0 \Rightarrow g(\alpha) < g(x_0) \Rightarrow g(\alpha) < 0$, διότι $g \uparrow (-1, +\infty)$,

$$h(2) = -g(\beta) < 0,$$

αφού $x_0 < \beta \Rightarrow g(x_0) < g(\beta) \Rightarrow 0 < g(\beta)$, διότι $g \uparrow (-1, +\infty)$.

Οπότε, $h(1) \cdot h(2) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0.$$

Άρα, η εξίσωση $(x-2)g(\alpha) + (1-x)g(\beta) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. Επομένως και η εξίσωση $\frac{g(\alpha)}{1-x} + \frac{g(\beta)}{x-2} = 0$, που είναι ισοδύναμη με την παραπάνω, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

(δ) Για $x > -1$, έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

(x_0 η μοναδική ρίζα της g στο $(-1, +\infty)$, του ερωτήματος (β))

Οπότε, η f ως συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$.

Επίσης,

$$f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{g^2(x)} \Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)|, \text{ για κάθε } x > -1.$$

Οπότε:

- Αν $x \in (-1, x_0)$:
 - αν $f(x) > 0$, τότε $f(x) = |g(x)| = -g(x)$, αφού $g(x) < 0$, στο $(-1, x_0)$.

- αν $f(x) < 0$, τότε $-f(x) = |g(x)| = -g(x)$, αφού $g(x) < 0$, στο $(-1, x_0)$, δηλαδή $f(x) = g(x)$.

• Αν $x \in (x_0, +\infty)$:

- αν $f(x) > 0$, τότε $f(x) = |g(x)| = g(x)$, αφού $g(x) > 0$, στο $(x_0, +\infty)$.

- αν $f(x) < 0$, τότε $-f(x) = |g(x)| = g(x)$, αφού $g(x) > 0$, στο $(x_0, +\infty)$, δηλαδή $f(x) = -g(x)$.

Άρα, έχουμε 4 συνεχείς συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & , \text{αν } x \in (-1, x_0) \\ g(x) & , \text{αν } x \in (x_0, +\infty) \\ 0 & , \text{αν } x = x_0 \end{cases} = |g(x)| = |e^x + \ln(x+1)|, \quad x \in (-1, +\infty)$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} -g(x) & , \text{αν } x \in (-1, x_0) \\ -g(x) & , \text{αν } x \in (x_0, +\infty) \\ 0 & , \text{αν } x = x_0 \end{cases} = -g(x) = -e^x - \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty)$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{αν } x \in (-1, x_0) \\ -g(x) & , \text{αν } x \in (x_0, +\infty) \\ 0 & , \text{αν } x = x_0 \end{cases} = -|g(x)| = -|e^x + \ln(x+1)|, \quad x \in (-1, +\infty)$$

ή

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{αν } x \in (-1, x_0) \\ g(x) & , \text{αν } x \in (x_0, +\infty) \\ 0 & , \text{αν } x = x_0 \end{cases} = g(x) = e^x + \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty).$$