

Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης 8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
- (β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
- (γ) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.
- (δ) Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- (ε) Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- (ς) Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- (ζ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- (η) Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- (θ) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$.
- (ι) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
- (ια) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- (ιβ) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
- (ιγ) Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- (ιδ) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ιε) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

- (ιγ') Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\nu} = +\infty$, για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- (ιζ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- (ιη') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- (ιθ') Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
- (κ') Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.
- (κα') Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.
- (κβ') Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$.
- (κγ') Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(\alpha) = 2$ και $f(\beta) = 3$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.
- (κδ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- (κε') Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.
- (κς') Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
- (κζ') Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- (κη') Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.
- (κθ') Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή το $[f(\beta), f(\alpha)]$.

2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση f η οποία έχει ολικό μέγιστο, το παρουσιάζει σε μια μόνο θέση x_0 .

- (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για κάθε συνάρτηση f , με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

- (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ παίρνει στο Δ μία μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

- (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').
5. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .
- (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

Θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
- (α') Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.
- (β') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.
- (γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.
- (δ') Να σχεδιάσετε (πρόχειρα) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$.
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:
- (α') $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x^3 - 1}$
- (β') $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x - 1|}$
- (γ') $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1}$
- (δ') $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-x^2 + x| - f(x)}{x^3 + 2}$
- (ε') $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{f(x)} + x \right)$
- (ς') $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$
- (ζ') $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \eta \mu \left(\frac{1}{f(x) - 2} \right)$
- (η') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x) - 2)}{f(x) - 2}$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.
- (α') Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.
- (β') Αν $h(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h .
- (γ') Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1 - x} & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}.$$

- i. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση ϕ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$.
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2022)

4. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(g \circ f)(x) = |\sin x|, \quad \text{για κάθε } x \in [0, \pi].$$

- (α') i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(β) Να βρείτε την συνάρτηση f .

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $h : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

(Τράπεζα θεμάτων)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- (α') Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- (β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.
- (γ) Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- (δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \left(f(x) \eta\mu \left(\frac{1}{3x+1} \right) \right)$.

(Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2020)

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.
- (β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.
- (γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
- (δ) Έστω η συνάρτηση $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1].$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$.
- ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις 2020)

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
- $$(g \circ f)(x) = \frac{2x+2}{x+2}, \quad x > -1.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} .
- (γ') Αν $g^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$, $x \in (0, 2)$, να βρείτε την μονοτονία της $g^{-1}(x)$.
- (δ') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g^{-1} με την ευθεία $\epsilon : y = -x + 1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x$.

- (α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (β') Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- (γ') Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{2x} + xe^x) < \frac{e^2 + e - 1}{e}$.
- (δ') Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \ln(1 - x_0)$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{e}{x}$.

- (α') Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.
- (β') Να λύσετε την εξίσωση: $x^x = e^e$, $x > 0$.
- (γ') Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g(x)f(x))$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2^x + 3^x) - x)$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x+1} - 1} = 8.$$

- (α') Να βρείτε το $f(0)$.
- (β') Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) + x_0^3 = 2e^{-x_0}.$$

- (γ') Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 2x}$.

11. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad |xf(x) - \eta\mu x| \leq x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|-2}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ f(x) + \alpha, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.
- (β') Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

- (γ) Αν $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση με $h(0) = -\frac{1}{2}$ και $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$h(x) = (1 - x)g(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

12. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

- (β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- (γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

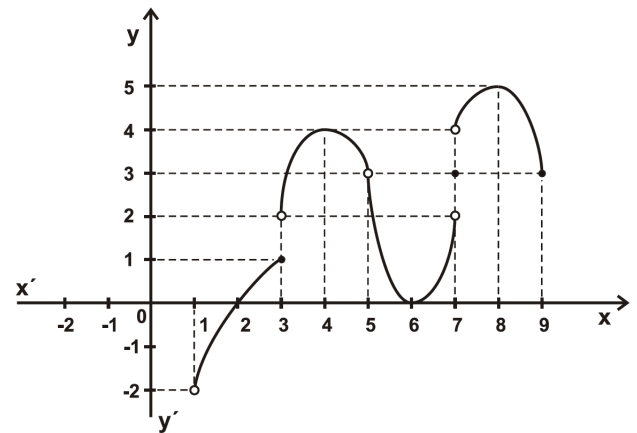
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- (δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



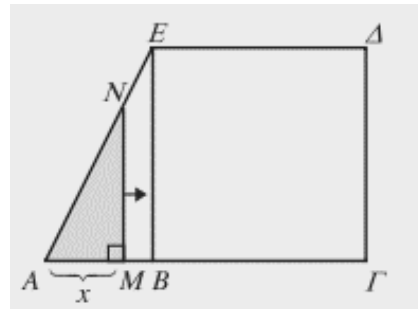
(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανεληθιαδικές Εξετάσεις 2016)

13. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 1$, $AG = 3$ και $\Gamma\Delta = 2$.

Το σημείο M κινείται και διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AG .

Έστω $AM = x$ και $E(x)$ το

εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



- (α) Να αποδείξετε ότι $(MN) = 2x$, με $0 < x \leq 1$.

- (β) Να αποδείξετε ότι $E(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \text{αν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

- (γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση E αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη της E^{-1} .

- (δ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων E και E^{-1} .

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα !!!

2024 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος !!!