

Διαγώνισμα Α' Τετραμήνου

Κεφάλαιο 1ο: Συναρτήσεις

Διάρκεια Εξέτασης: Δύο (2) διδακτικές ώρες

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

11 Ιανουαρίου 2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 8

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με τύπο } g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{και}$$

$$h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{με τύπο } h(x) = \ln x.$$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

B2. Αν $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$, $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 7

B4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2024.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) + x_0^3 = 2e^{-x_0}$.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right).$$

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

$$f(-1) = 0 \quad \text{και} \quad f((-\infty, 0)) = \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x) + f(x) + 1}{f^2(x) - f(x) + 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{f(x)}.$

Μονάδες 16

Σας εύχομαι επιτυχία!

*“Μην καταδέχεσαι να ρωτάς:
Θα νικήσουμε; Θα νικηθούμε;
Πολέμα!”*

Νίκος Καζαντζάκης, 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.