

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Η Έννοια της Παραγώγου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Θέμα 11ο. Δίνεται η συνεχής και $1-1$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sin x}{x} = 2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 2$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{\eta \mu(f(x))} = 1.$

(β) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}.$$

(γ) Αν η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(x)}{2-x} = f'(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

Λύση.

(α) i. Θέτουμε

$$\frac{f(x) + 1 - \sin x}{x} = g(x), \quad x \neq 0.$$

Τότε,

$$f(x) = xg(x) + \sin x - 1, \quad x \neq 0.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + \sin x - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 1) = 0 \cdot 2 + (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x = 0$, τότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

ii. Για κάθε $x \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{xg(x) + \sin x - 1}{x} = g(x) + \frac{\sin x - 1}{x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) + \frac{\sin x - 1}{x} \right) = 2 + 0 = 2.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$.

iii. Για $x \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{\eta\mu f(x)} \right) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1,$$

διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \stackrel{(\alpha')_{ii}}{=} 2$, αφού αν θέσουμε $\eta\mu x = u$, έχουμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, τότε το u τείνει στο 0,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} \stackrel{(\alpha')_{ii}}{=} \frac{1}{2}$,

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\eta\mu u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$, αφού αν θέσουμε $f(x) = u$, έχουμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, τότε το u τείνει στο 0.

(β) Για $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-x)}{x} &= \frac{f(x) - f(0) + f(0) - f(-x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f(-x) - f(0)}{x} \\ &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0}. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} = \lim_{u = -x, u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = f'(0) = 2.$$

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} \right) = 2 + 2 = 4.$$

(γ) Η εξίσωση $\frac{f^2(x)}{2-x} = f'(x)$, στο ανοικτό διάστημα $(0, 2)$ είναι ισοδύναμη, δηλαδή έχει τις ίδιες ρίζες, με την εξίσωση

$$(2-x) \frac{f^2(x)}{2-x} = (2-x)f'(x) \Leftrightarrow f^2(x) + (x-2)f'(x) = 0.$$

Έστω $h(x) = f^2(x) + (x-2)f'(x)$, $x \in [0, 2]$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (f' συνεχής στο $[0, 2]$ από την υπόθεση).

Επίσης,

$$h(0) = f^2(0) - 2f'(0) = -2f'(0) = -4 < 0 \text{ και}$$

$$h(2) = f^2(2) + (2-2)f'(0) = f^2(2) > 0, \text{ διότι } f(2) \neq 0 = f(0), \text{ αφού η συνάρτηση } f \text{ είναι } 1-1.$$

Οπότε, $h(1) \cdot h(2) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f^2(x) + (x-2)f'(x) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

Επομένως και η εξίσωση $\frac{f^2(x)}{2-x} = f'(x)$, που είναι ισοδύναμη με την παραπάνω, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.