

Το Θέμα της Εβδομάδας

Η Έννοια της Παραγώγου

Εφαπτομένη της C_f

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 12ο. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 3$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της C_f , η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ϵ).

Λύση.

(α) Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Οπότε, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha.$$

Οπότε,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + (1 - \alpha)x, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 + (1 - \alpha)x - [\alpha + (1 - \alpha)]}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 - 2\sqrt{x} - [\alpha + (1 - \alpha)]}{x - 1} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^2 + x - \alpha x - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - 2\sqrt{x}}{x - 1} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(\alpha x + 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(x - 1)(1 + \sqrt{x})} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(1 - x)}{-(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \\ \Leftrightarrow \alpha + 1 &= -1 \Leftrightarrow \alpha = -2. \end{aligned}$$

Επίσης, $\beta = 1 - \alpha = 3$.

(β) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, είναι

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x + 1) = -1$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - 2\sqrt{x} - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{-(1-x)(1 + \sqrt{x})} = \frac{2}{-(1 + \sqrt{1})} = -1. \end{aligned}$$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$, με $f'(1) = -1$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$, είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} -4x + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης (η) της C_f , η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ).

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ϵ) είναι $\lambda_\epsilon = -1$ και της ευθείας (η) είναι $\lambda_\eta = f'(x_0)$.

Οπότε,

$$\epsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\epsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1.$$

Άρα,

- αν $x_0 \leq 1$, τότε

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -4x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

- αν $x_0 > 1$, τότε

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x_0}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_0} = -1, \text{ αδύνατη.}$$

Άρα, $B\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ και η ευθεία (η) έχει εξίσωση

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}.$$