

Το Θέμα της Εβδομάδας

Η Έννοια της Παραγώγου

Εφαπτομένη της C_f

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 13ο. Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η ευθεία (ϵ) εφαπτεται της C_f στο σημείο της $A(2, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(0, 1)$.

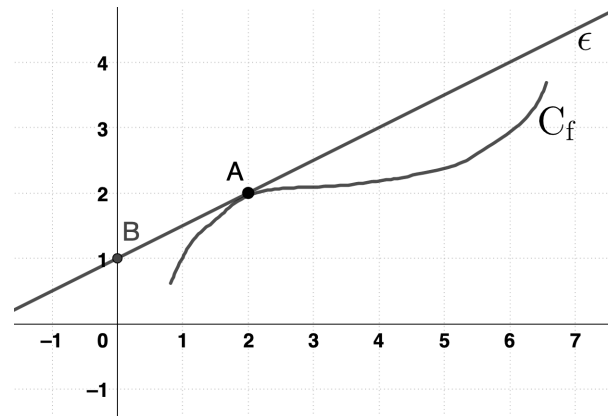
Να βρείτε:

(α) την τιμή $f'(2)$,

(β) το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 2}{h}$,

(γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - x^2}{x^2 - 4}$,

(δ) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = f^2(x) + f(x^2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $M(2, g(2))$.



Λύση.

(α) Θα βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ_ϵ της ευθείας (ϵ) .

Η ευθεία (ϵ) διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$ και $B(0, 1)$. Οπότε, έχουμε ότι

$$\lambda_\epsilon = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2}.$$

Αφού η ευθεία (ϵ) εφαπτεται της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$, τότε $f'(2) = \lambda_\epsilon = \frac{1}{2}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 2}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(f(2+3h) - 2)}{3h} \\ &= 3 \lim_{3h=u} \frac{f(2+u) - 2}{u} \\ &= 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{u} \\ &= 3f'(2) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - x^2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) + 4 - 4 - x^2}{x^2 - 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - 2) + (4 - x^2)}{(x - 2)(x + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2}{x + 2} \cdot \frac{f(x) - 2}{x - 2} + \frac{4 - x^2}{(x - 2)(x + 2)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2}{x + 2} \cdot \frac{f(x) - 2}{x - 2} + \frac{-(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{2}{x + 2} \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} - 1 \right] \\
 &= \frac{2}{4} f'(2) - 1 = -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

(δ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x^2 - x) \cdot (x^2 - x)' = 2f'(x)f(x) + (2x - 1)f'(x^2 - x).$$

Οπότε,

$$g'(2) = 2f'(2)f(2) + 3f'(2) = \frac{7}{2} \quad \text{και} \quad g(2) = f^2(2) - f(2^2 - 2) = f^2(2) - f(2) = 6.$$

Η εφαπτομένη (η) της C_g στο σημείο της $M(2, g(2))$ έχει εξίσωση

$$\eta: y - g(2) = g'(2)(x - 2),$$

δηλαδή

$$\eta: y = \frac{7}{2}x - 1.$$