

Άλγεβρα Α' Λυκείου
Εξισώσεις 2ου Βαθμού
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$|2x - 1| = 3.$$

- (β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α'), τότε να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0.$$

2. (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$|x - 2| = |2x - 1|.$$

- (β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α'), τότε να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 + \alpha|x| - 20 = 0$

ii. $x^4 + \beta x^2 - 6 = 0$

3. (α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης

$$-2x^2 + 10x = 12.$$

- (β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0.$$

4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (α) Να λύσετε την εξίσωση (1), για $\lambda = 1$.

- (β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (γ) i. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση (1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

- ii. Να βρείτε την διπλή πραγματική ρίζα της εξίσωσης (1) για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

- (δ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

- ii. Να βρείτε τις δύο πραγματικές και άνισες ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Σημείωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \\ \alpha \neq 0 \\ \text{Διακρίνουσα:} \\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Αν $\Delta > 0$,
τότε η εξίσωση
έχει δύο ρίζες
άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν $\Delta = 0$,
τότε η εξίσωση
έχει μια διπλή
ρίζα, την

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Αν $\Delta < 0$,
τότε η εξίσωση
είναι αδύνατη
στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση

Για κάθε
 $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$x^2 = |x|^2$$

$$x^4 = (x^2)^2$$

(ε) Αν η εξίσωση έχει ρίζα το 2, να βρείτε τις τιμές του λ.

5. Δίνεται η εξίσωση $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

(β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

i. $x_1 + x_2$

iii. $(1 + x_1)(1 + x_2)$

v. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

ii. $x_1 x_2$

iv. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

vi. $x_1^2 + x_2^2$

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

7. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$.

(α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

(β) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A και B.

8. (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$|x - 3| = \sqrt{2}.$$

(β) Να βρείτε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος.

9. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να βρείτε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β .

(γ) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

10. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν:

(α) άθροισμα 2 και γινόμενο 2

(β) άθροισμα 2 και γινόμενο -1 .

11. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x + 1)$ μέτρα και x μέτρα.

(α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

“ Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί, όχι εντελώς απρόσιτο ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητες μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα διδακλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης. ”

David, Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.

Σημείωση

Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , τότε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Σημείωση

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

Σημείωση

Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 είναι $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

Σημείωση

Αν υπάρχουν 2 πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα S και γινόμενο P, τότε αυτοί θα είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0$.