Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Παράγωγος

Εφαπτομένη της C_f-Θεώρημα του Rolle

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 15ο. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \\ \text{συν}x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{με } \alpha < -3.$$

(α') Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(β') Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

(γ') Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

(δ') Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση.

(α') Στο διάστημα $(-\infty, 0)$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ είναι συνεχής.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$:

Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{συν}x = \text{συν}0 = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$

$f(0) = \alpha \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1.$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(\alpha x^2 - 3x - 1\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\alpha x^2 - 3x - 1\right) = -1$$

και
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{συνx-1}{x}=0.$
Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

(β') Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=(συνx)'=-ημx$ και είναι $f(0)=1\neq 0=f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.
Άρα, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, αλλά δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση.

(γ') Για $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $ημx<0$, άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow -ημx=0\Leftrightarrow ημx=0$ είναι αδύνατη.
Για $x\in(0,\pi)$ έχουμε ότι $ημx>0$, άρα $f'(x)=0\Leftrightarrow -ημx=0\Leftrightarrow ημx=0$ είναι αδύνατη.
Αφού $f'(\pi)=ημ\pi=0$, το $x=\pi$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(δ') Οι τετμημένες των σημείων της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$ με $x<0$.
Για $x<0$, είναι

$$f'(x)=3\alpha x^2-6x-1.$$

Οπότε, έχουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3\alpha x^2-6x-1=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο το x και διακρίνουσα $\Delta=36+12\alpha=12(\alpha+3)<0$, αφού δίνεται ότι ισχύει $\alpha<-3$.
Η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$, άρα η C_f δεν έχει σημεία με αρνητικές τετμημένες στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.