

Το Θέμα της Εβδομάδας

Παράγωγος

Εφαπτομένη της C_f - Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 16ο. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$,
- $f'(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- ii. $f(0) = 0$,
(υπόδειξη: εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ για την f σε δύο κατάλληλα διαστήματα)
- iii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x}.$$

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.



Η λύση του θέματος