

Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής (Μέρος Α')

13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = -2xf^2(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

- (β) Αν $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) = -2xf(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

- (β) Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

3. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν:

(α) $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^x + x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(β) $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^{2x} + \eta\mu x + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(0) = -1$ και $f'(x) = \sin x - x \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(1) = e$ και $f'(x) = e^x + xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ε) $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ς) $f(4) = 5$ και $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(0) = \ln 2$ και $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$f(-1) = 1, \quad f(1) = -1 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Θεωρ. Σελ 133

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα Δ .

Πορ. Σελ 133

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ .
Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{2}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6x + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η C_f στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2, να βρείτε τον τύπο της f .

7. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(2) = 4$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + xf'(x) = e^x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)f'(x) = e^{2x}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) = x^2 f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Αν $f(1) = e$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

11. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύουν:

- $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν στο $x_0 = 1$ παράλληλες εφαπτομένες,
- $f(2) = g(2) - 3$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) αν η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 , τέτοιες, ώστε $-1 < \rho_1 < 3 < \rho_2$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

“Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά”.

Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.

Σημείωση

$$\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Σημείωση

$$\left(\frac{f^2(x)}{2f(x)f'(x)} \right)' = \frac{f^2(x)}{2f(x)f'(x)}$$

Σημείωση

Αν για μια συνάρτηση g ισχύει η σχέση $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = ce^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.