

Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής (Μέρος Β')

14ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 7, x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = e^x + x + \sin x, x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = \sin x - 2x, x \in \mathbb{R}$

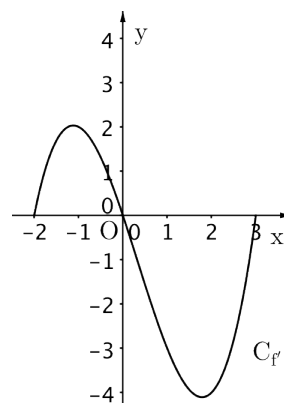
(ε) $f(x) = e^{2x} - 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x, x \in \mathbb{R}$

(ς) $f(x) = 2xe^x - x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.



3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

4. (α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = 2e^x + x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}.$$

(β) Να λύσετε την ανίσωση

$$e^x > -\frac{x^2}{2} + x.$$

5. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}, x \in (0, \pi).$$

Θεωρ. Σελ 135

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln(x - 2) - 9$, $x > 2$.

(α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x - 2) > 9 - x^2$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α) $x^3 - x^2 + 3x < 10$

(γ) $x^3 + x + \sin x < 1$

(β) $x + \ln x < 1$

(δ) $\frac{2}{x} - 2 < \ln x$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\ln x + \frac{1}{x} = x$

(β) $2x + \sin x = 1$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

i. $f(x) = 0$

iii. $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = \frac{1}{2}$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{10}{x^2 + 1} > x$.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x = -2016$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+2} \right)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(δ) Να βρείτε την f^{-1} .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

(γ) Να βρείτε την f^{-1} .

“Καμία ανθρώπινη δραστηριότητα δεν μπορεί να ονομαστεί επιστήμη αν δεν μπορεί να στηριχτεί στα Μαθηματικά”.

Da Vinci, Leonardo, 1452 – 1519, Ιταλός ζωγράφος.