Επαναληπτικές Ασκήσεις
Η Ευθεία στο Επίπεδο
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-3,2)$ και $\Gamma(1,-3)$.

   (α') Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

   (β') Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$.

   (γ') Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB.

2. Δίνεται η ευθεία $\epsilon : -\mathrm{x}+\mathrm{y}-2=0$ και τα σημεία $\mathrm{A}(-5,-1)$ και $\mathrm{B}(-3,5)$.

   (α') Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β.

   (β') Να βρείτε:

   i. την εξίσωση της ευθείας ϵ' που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ϵ,

   ii. το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ',

   iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ϵ.

3. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1 : \lambda x+(\lambda-1)y-1=0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 4x+\lambda y+\lambda-2=0.$$

   Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

   (α') $\varepsilon_1 \parallel y'y$ (β') $\varepsilon_1 \parallel x'x$ (γ') $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ (δ') $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha-3)\mathrm{x}+(\alpha+1)\mathrm{y}-\alpha-1=0,\ \alpha\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

   και η ευθεία

$$\eta : \quad \mathrm{x}-\mathrm{y}+10=0.$$

   (α') Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

   (β') Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, για την οποία η ευθεία ϵ που ορίζεται από την εξίσωση (1), είναι παράλληλη στην ευθεία η.

   (γ') Αν η ευθεία ϵ του ερωτήματος (β') ορίζεται από την εξίσωση (1) για $\alpha=1$, τότε:

   i. να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών η και ϵ,

   ii. να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ϵ και η.

5. Έστω τα σημεία:
$$\mathrm{A}(0,2) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(4,6)$$
και η ευθεία
$$\epsilon : \mathrm{x} - 2\mathrm{y} + 2 = 0.$$
   (α') Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB.
   (β') Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ το οποίο ισαπέχει από τα A και B.
   (γ') Να βρείτε τα σημεία M της ευθείας ϵ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 4 τ.μ.

6. Θεωρούμε το σημείο $\Gamma(-1,2)$ και τα μεταβλητά σημεία:
$$\mathrm{A}(\lambda+1, 2\lambda) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(2-\lambda, 4), \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (α') Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.
   (β') Αν $(\mathrm{AB}\Gamma) = 3$ τ.μ, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

7. Δίνονται οι ευθείες:
$$\epsilon_1 : 3\mathrm{x} - \mathrm{y} - 1 = 0, \quad \epsilon_2 : \mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 7 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_3 : \lambda\mathrm{x} + (\lambda - 1)\mathrm{y} - 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (α') Αν οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ.
   (β') Αν $\lambda = 2$, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_3.

8. Δίνεται σημείο $\mathrm{A}(-5,5)$. Να βρείτε:
   (α') την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και
      i. είναι κάθετη στον άξονα $\mathrm{x}'\mathrm{x}$,
      ii. έχει συντελεστή διεύθυνσης τον πραγματικό αριθμό λ,
   (β') τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο A και απέχουν από το σημείο $\mathrm{B}(-3,4)$ απόσταση ίση με 1.

9. Δίνονται τα σημεία
$$\mathrm{A}(1,3) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(-2,2)$$
και η ευθεία
$$\epsilon : 3\mathrm{x} + \mathrm{y} + \alpha = 0, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   (α') Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείο A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ.
   (β') Για $\alpha = 4$,
      i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, όπου Γ είναι το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $\mathrm{y}'\mathrm{y}$.
      ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

¨ *Αυτό που αγάπησα στα Μαθηματικά, είναι το ότι οι αποδείξεις μιλούν από μόνες τους. Δεν χρειάζεται να παρουσιάσεις διαπιστευτήρια για αυτές και να πείσεις τους άλλους για την εγκυρότητα τους. 'Ολα είναι εκεί, μπροστά σου.* ¨

Du Sautoy, Marcus Peter Francis, 1965- , Άγγλος μαθηματικός.