

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου 19ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(α) \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \quad \left(\text{απ. } 2 - \frac{5}{e} \right)$$

$$(β) \int_0^1 (x^2 - 1)e^{2x} dx \quad \left(\text{απ. } \frac{1 - e^2}{4} \right)$$

$$(γ) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad \left(\text{απ. } \frac{1}{2} \right)$$

$$(δ) \int_0^{\pi} x \sin 2x dx \quad \left(\text{απ. } 0 \right)$$

$$(ε) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad \left(\text{απ. } -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \right)$$

$$(ς) \int_0^{\pi} e^{-x} \eta \mu x dx \quad \left(\text{απ. } \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \right)$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(α) \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \quad \left(\text{απ. } 2\sqrt{2} - 2 \right)$$

$$(β) \int_0^4 \sqrt{2x + 1} dx \quad \left(\text{απ. } \frac{26}{3} \right)$$

$$(γ) \int_{-1}^0 x \sqrt{x + 1} dx \quad \left(\text{απ. } -\frac{4}{15} \right)$$

$$(δ) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad \left(\text{απ. } \ln \frac{e + 1}{2} \right)$$

$$(ε) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx \quad \left(\text{απ. } \frac{8}{3} \right)$$

$$(ς) \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx \quad \left(\text{απ. } 2e^2 \right)$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(α) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \eta \mu x} dx \quad \left(\text{απ. } \sqrt{2} \right)$$

$$(β) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx \quad \left(\text{απ. } \ln \sqrt{3} \right)$$

$$(γ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 x dx \quad \left(\text{απ. } \frac{2}{3} \right)$$

4. (α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντιστροφής.

Σημείωση

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:
 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$,
όπου f', g' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Σημείωση

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση:
 $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$,
όπου f, g' συνεχείς συναρτήσεις,
 $u = g(x)$,
 $du = g'(x) dx$,
 $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f^{-1}(x)dx$.

6. Να αποδείξετε ότι: $2 < \int_0^2 \sqrt{x^2 + 4}dx < \sqrt{5}$.

7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1) = f'(1) = 1$.

(α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(β) Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x)dx < 6$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x > 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

9. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 1 \\ -6x + 12, & x \geq 1 \end{cases}$ και τον άξονα των x .

10. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και την ευθεία (ϵ).

12. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g με την ευθεία $\epsilon : y = e$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την ευθεία (ϵ).

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε :

- η γραφική παράσταση της f , να εφάπτεται της $\epsilon : y = \frac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$,
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

(α) Να αποδειχθεί ότι:

$$\text{i. } f(0) = \frac{1}{4} \text{ και } f'(0) = 0. \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x) - 1}{\ln x f(x)} = 0.$$

(β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f' , τον άξονα x' και την ευθεία $x = 1$.

“Αν νιώθω θλιπνυμένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να γίνω ευτυχής. Αν είμαι ευτυχισμένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να με κρατήσουν ευτυχισμένο.”

Renyi Alfred, 1921 – 1970, Ούγγρος μαθηματικός.

Σημείωση

Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.
Αν επιπλέον ισχύει ότι οι f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Σημείωση

Το εμβαδόν χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f μιας συνεχούς συναρτήσεως f , τον άξονα των x' και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, δίνεται από το $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

Σημείωση

Το εμβαδόν χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g δύο συνεχών συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, δίνεται από το $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$.