

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Διαγώνισμα Β' Τετραμήνου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο:

Βαθμός:

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 20

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 10

- A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i. Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

- ii. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$,
ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

- iii. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

- iv. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

- ν. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \alpha + \frac{1}{x}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R},$$

για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 25

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$, έχει εξίσωση $y = -x + 2$.

Μονάδες 5

- B3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία (ϵ), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 15

Σας εύχομαι επιτυχία!