Επαναληπτικές Ασκήσεις

20ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α') Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

(β') Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

(γ') Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$.

(δ') Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία δεν είναι γνησίως μονότονη, δεν είναι και 1-1.

(ε') Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f o g$ και $g o f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

(ϛ') Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

(ζ') Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.

(η') Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(θ') $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

(ι') Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

(ια') Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0.

(ιβ') Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

(ιγ') Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

(ιδ') $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ιε') Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

(ιϛ') Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

(ιζ') Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό της ελάχιστο.

(ιη') Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

(ιθ') Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

(κ') Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f.

(κα') Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f ¨διαπερνα¨ την καμπύλη.

(κβ') Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε ένα σημείο καμπής.

(κγ') Μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει δύο κοινά σημεία με την C_f.

(κδ') Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(κε') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx$.

(κϛ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

(κζ') Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

(κη') Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, ισχύει:
Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-2}{\ln x}$, $x > 0$ και $x \neq 1$.

   (α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

   (β') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   (γ') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2021$.

   (δ') Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+2) = f(x^2+2x+4)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

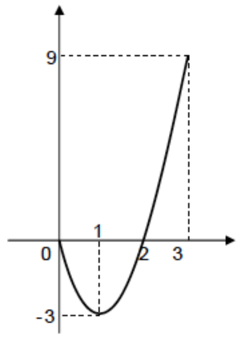
   (α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

   (β') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(γ') Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

(δ') Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

3. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$.



(α') Να βρείτε τα A και $f(A)$.

(β') Να λύσετε την εξίσωση

$$f^2(x) + 3f(x) = 0.$$

(γ') Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

(δ') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f(x)+3}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = -1$ τοπικό ακρότατο και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : y = 9x + 2021$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

(β') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(δ') Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1-x}{x} - \ln x$, $x > 0$.

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

(β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

(γ') Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 2xf(x) = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία θετική ρίζα x_0.

(β') Να λύσετε την ανίσωση $\quad f(x) - \dfrac{2}{1+f^2(x)} > 0$.

(γ') Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$, $x \in (0, 1)$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της, f^{-1}.

(β') Αν $g(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g.

(γ') Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της g ως προς x.

8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α') i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

   iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \dfrac{3}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (β') Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι:

   i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$,

   ii. η f δεν είναι κοίλη.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

   - Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$.
   - $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

   (α') i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

   ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

   (β') Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (γ') Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

   (δ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

(Θέμα Γ, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2022)

10. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \;\; x \in [-1, +\infty), \;\; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$
$$g(x) = x^2 - 1, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

   Αν η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε να αποδείξετε ότι:

   (α') $\alpha = 1$,

   (β') η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1}.
   Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 1$, $x \in [-1, +\infty)$, τότε να βρείτε:

   (γ') τη συνάρτηση $f^{-1} o g$,

   (δ') το όριο $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} o g)(x)}$, όπου $(f^{-1} o g)(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$, όπου τα β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 3$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\beta = 0$ και $\gamma = 3$.

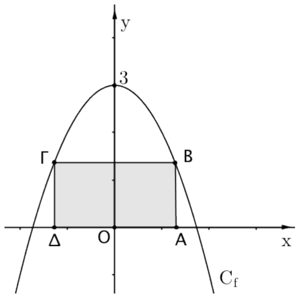
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, όπου $B(x, f(x))$, με $x \in (0, \sqrt{3})$.

(β') Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = -2x^3 + 6x, \;\; x \in (0, \sqrt{3}).$$

(γ') Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

(δ') Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, \sqrt{3})$ για το οποίο το εμβαδόν $E(x_0)$ του αντίστοιχου ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1$.



12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

(β') Να εξετάσετε αν το σημείο $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

(γ') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(δ') Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Θέμα Γ, Τέκνων Ελλήνων Εξωτερικού, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει:
$f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$.

(β') Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

ii. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left((f(x) - 1)\ln x\right)$.

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

(α') $f(0) = -3$,

(β') $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$,

(γ') υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = e^{-x_0}.$$

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & \text{για } x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & \text{για } x < 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

(β') Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(γ') i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(δ') Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

(Θέμα Γ, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2019)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

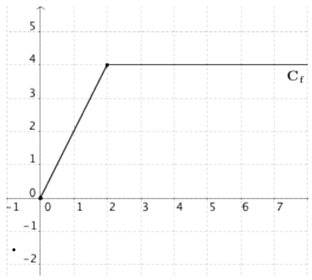
(α') Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

(β') Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

(γ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

(Θέμα Δ, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2018)

17. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $F(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:



(α') $F(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \in [0, 2] \\ 4x - 3, & \text{αν } x \in (2, +\infty) \end{cases}$.

(β') $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx = 12$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(β') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2024$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ln(x^2) - x^2}{2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

(δ') Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!