

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

Βασικό Τυπολόγιο

Κωνικές Τομές

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Εξίσωση κύκλου:

- με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ : $x^2 + y^2 = \rho^2$
- με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Γενική μορφή εξίσωσης κύκλου:

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$,
με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

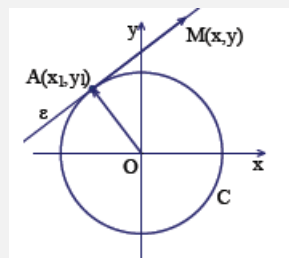
Εφαπτομένη κύκλου:

- Η εφαπτομένη του κύκλου

$$C : x^2 + y^2 = \rho^2$$

στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$\epsilon : x_1x + y_1y = \rho^2.$$



- Για την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2,$$

στο σημείο του $M(x_1, y_1)$, εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 2 στη σελίδα 86 του σχολικού βιβλίου.

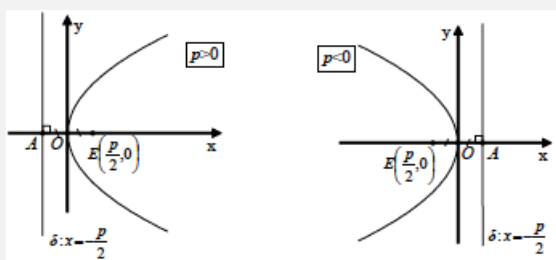
Παραβολή:

• Ορισμός:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο E εστία και μια ευθεία δ διευθετούσα.

• Με εστία στον άξονα $x'x$:

Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$, έχει εξίσωση: $y^2 = 2px$.

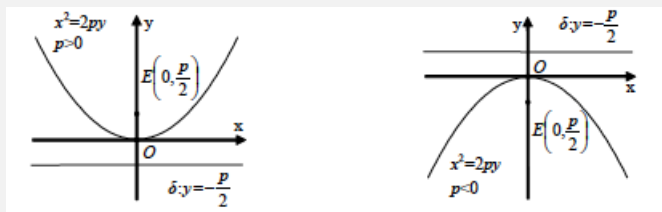


Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της.

Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $y_1 y = p(x + x_1)$.

• Με εστία στον άξονα $y'y$:

Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$, έχει εξίσωση: $x^2 = 2py$.



Ο άξονας $y'y$ είναι άξονας συμμετρίας της.

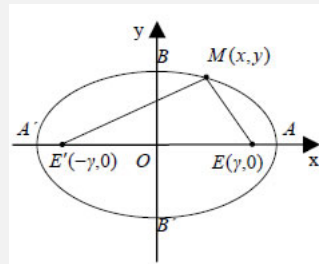
Η εφαπτομένη της παραβολής $C: x^2 = 2py$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $x_1 x = p(y + y_1)$.

Έλλειψη:

- Ορισμός: Έλλειψη με εστίες E, E' , ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του EE' . Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε, συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών (εστιακή απόσταση) με 2γ .
- Με εστίες στον άξονα $x'x$:

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0)$, $E'(-\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$



όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

$$(ME) + (ME') = 2\alpha > (EE') = 2\gamma.$$

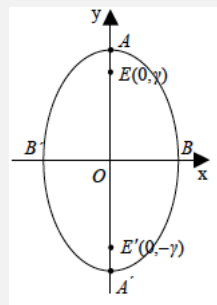
Η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$

έχει εξίσωση: $\frac{x_1 x}{\alpha^2} + \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1$.

- Με εστίες στον άξονα $y'y$:

Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(0, \gamma)$, $E'(0, -\gamma)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1,$$



όπου $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$.

Η εφαπτομένη της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $\frac{x_1 x}{\beta^2} + \frac{y_1 y}{\alpha^2} = 1$.

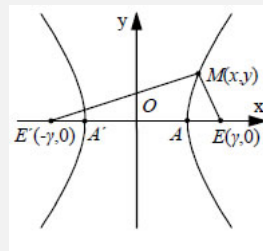
- Τα σημεία A, A', B, B' είναι οι κορυφές της έλλειψης.
- Ο AA' είναι ο μεγάλος άξονας και ο BB' ο μικρός άξονας της έλλειψης.
- Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 2\alpha$ και το μήκος του μικρού άξονα είναι $(B'B) = 2\beta$. Η εστιακή απόσταση είναι $(EE') = 2\gamma$.
- Εκκεντρότητα: $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει ότι $0 < \epsilon < 1$.

Υπερβολή:

- Ορισμός: Υπερβολή με εστίες E, E' , ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία E και E' είναι σταθερή και μικρότερη του EE' . Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου από τις εστίες τη συμβολίζουμε, συνήθως, με 2α και την απόσταση των εστιών (εστιακή απόσταση) με 2γ .
- Με εστίες στον άξονα $x'x$:

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$ και σταθερή απόλυτη διαφορά 2α είναι

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$



όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

$$|(ME) - (ME')| = 2\alpha < (EE') = 2\gamma.$$

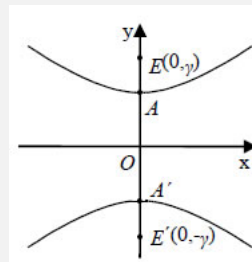
Η εφαπτομένη της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$

έχει εξίσωση: $\frac{x_1 x}{\alpha^2} - \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1$.

- Με εστίες στον άξονα $y'y$:

Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$ και σταθερή απόλυτη διαφορά 2α είναι

$$C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$$



όπου $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$.

Η εφαπτομένη της υπερβολής $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$

έχει εξίσωση: $\frac{y_1 y}{\alpha^2} - \frac{x_1 x}{\beta^2} = 1$.

- Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$, ενώ της $C: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$.
- Εκκεντρότητα: $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει ότι $\epsilon > 1$.