

Η Έννοια της Πραγματικής Συνάρτησης Γραφική Παράσταση Συνάρτησης 1ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2}$

(γ) $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{|x|-3}$

(ια) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

(β) $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

(ζ) $f(x) = \sqrt{e^{x-1}-1}$

(ιβ) $h(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$

(γ) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

(η) $g(x) = \ln(e^x-2)$

(ιγ) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}-2\right)$

(δ) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$

(θ) $h(x) = \sqrt{\ln x+1}$

(ε) $g(x) = \sqrt{2-|x-1|}$

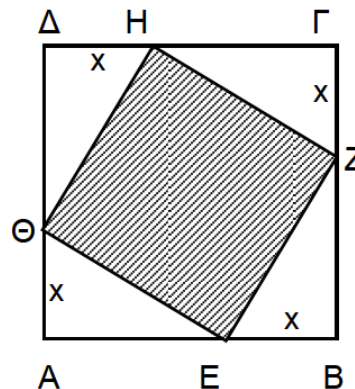
(ι) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}$

(ιδ) $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + \lambda x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το \mathbb{R} .

3. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλα-
νού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τε-
τραγώνου $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις
πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:



(α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ συ-
ναρτήσει του x .

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τε-
τραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από την συ-
νάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2018)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2026$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2025$ είναι αδύνατη.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha^2$ έχει μία τουλάχιστον λύση (ως προς x) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Ορισμός

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Σημείωση

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\alpha \in f(A)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x στο σύνολο A .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2 - 6, & x < 2 \end{cases}$

- (α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε το σημείο $M(1, \lambda)$, να ανήκει στη C_f .
- (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, 2)$.

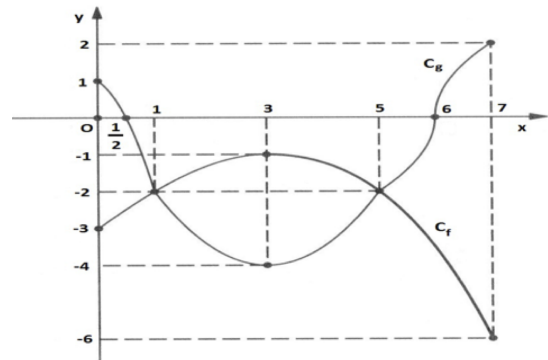
- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
- (β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει ότι $f(-1 - e^\lambda) = f(e^\lambda) + 3$.
- (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(-x) = f(x) - 1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(\ln x + 1)$. Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ,
- (β) τα σημεία τομής, αν υπάρχουν, της C_f με τους άξονες x' και y' ,
- (γ) το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' .

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .
- (β) Να επιλύσετε γραφικά τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:
 - i. $f(x) = 0$
 - ii. $g(x) = 0$
 - iii. $f(x) = g(x)$
 - iv. $g(x) > 0$
 - v. $f(x) < -2$
 - vi. $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$



- (γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες ως προς x .

9. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \ln x + 1$	(δ) $f(x) = \ln x $	(ζ) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 3 \\ 4 - x, & x < 3 \end{cases}$
(β) $f(x) = \ln(x + 1)$	(ε) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$	(η) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$
(γ) $f(x) = \ln(x - 1)$	(Ϛ) $f(x) = \ln(-x)$	

Από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f σε καθεμία περίπτωση.

“Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.”

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.

Σημείωση

Ο αριθμός η ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.