

Ισότητα Συναρτήσεων-Πράξεις με Συναρτήσεις

Σύνθεση Συναρτήσεων

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln |x|.$$

Να αποδείξετε ότι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}.$$

δεν είναι ίσες.

Στη συνέχεια, να βρείτε το ευρύτερο υπόσύνολο του \mathbb{R} για το οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{2-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

(α) $f + g$

(β) $f - g$

(γ) $f \cdot g$

(δ) $\frac{f}{g}$

4. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, αν:

(α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$

(β) $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

(γ) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = x^2 - 1$

(δ) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$

(ε) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \ln x$.

Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f, g θα λέγονται **ίσες** όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$.

Σημείωση

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{και} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Γενικά, $g \circ f \neq f \circ g$.

Ισχύει όμως: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

