

# Ακρότατα Συνάρτησης-Συνάρτηση 1 – 1

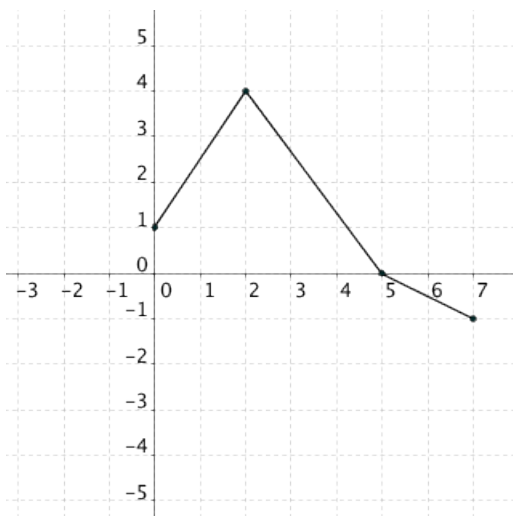
## Αντίστροφη Συνάρτηση

### 4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης  $f$  καθώς επίσης και το σύνολο τιμών της.
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
- (γ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .
- (δ) Να βρείτε την τιμή της  $f \circ f$  στο  $x = 5$ .
- (ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $|f|$  και να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.
- (ς) Να λύσετε τις εξισώσεις:
  - i.  $f(x) = -1$ ,
  - ii.  $f(x) = x^2 + 4$ .



**Ορισμός**

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

**Ορισμός**

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) **μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \leq 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (β) Είναι ο αριθμός 2 ολικό μέγιστο της συνάρτησης  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x + 1}{3^x}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση  $e^x + 1 - 2 \cdot 3^x = 0$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3^x + x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση  $3^x + x^3 = 4$ .

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + 3x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση  $x^{10} - 32x^5 = 6x - 3x^2$ .

**Σημείωση**

Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **συνάρτηση 1-1** όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η **συνεπαγωγή** αν  $x_1 \neq x_2$  τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Σημείωση**

Χρήσιμο σε ασκήσεις: Μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η **συνεπαγωγή** αν  $f(x_1) = f(x_2)$  τότε  $x_1 = x_2$ .

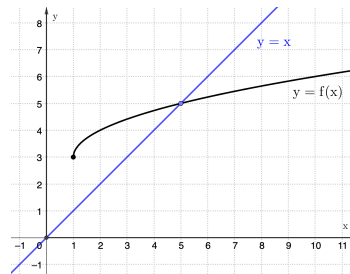
**Σημείωση**

Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι **γνησίως μονότονη**, τότε είναι και 1-1.

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι :  
 $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1 - 1.  
 (β) Να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την εξίσωση  $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$ .
7. Να λύσετε την εξίσωση:  $e^x - e^{x^2} = |x| - \sqrt{x}$ .
8. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ώστε η  $f \circ g$  να είναι 1 - 1.  
 (α) Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1 - 1.  
 (β) Αν για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι  $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με τύπο  $f(x) = \sqrt{x-1} + 3, x \geq 1$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της και την αντίστροφη της.

- (β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  καθώς και η διχοτόμος  $y = x$  της γωνίας  $x\hat{O}y$ . Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f^{-1}$  και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .



**Σημείωση**  
 Οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ , που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1 - 1.  
 (β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ .

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 2)$  και  $B(3, -2)$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.  
 (β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(3x - 1) + 2 < 0$ .  
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^{x-1}) = 2$ .  
 (δ) Να βρείτε τις τιμές  $f^{-1}(2)$  και  $f^{-1}(-2)$ .  
 (ε) Να λύσετε την εξίσωση  $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$ .

**Σημείωση**  
 $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

12. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γνησίως μονότονη συνάρτηση που η γραφική παράσταση της τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο  $A(1, \ln 2)$ .

- (α) Να βρείτε τη μονοτονία της.  
 (β) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θετικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$ .  
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$ .  
 (δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in \mathbb{R}$ .  
 Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση  $g$  δεν αντιστρέφεται.

*“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”*

Bacon Roger, 1214 - 1292, Άγγλος φιλόσοφος.

**Σημείωση**  
 Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη  $C_f$  το πολύ σε ένα σημείο.