

Επαναληπτικά Θέματα Μονοτονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση 5ο Φύλλο Εργασίας

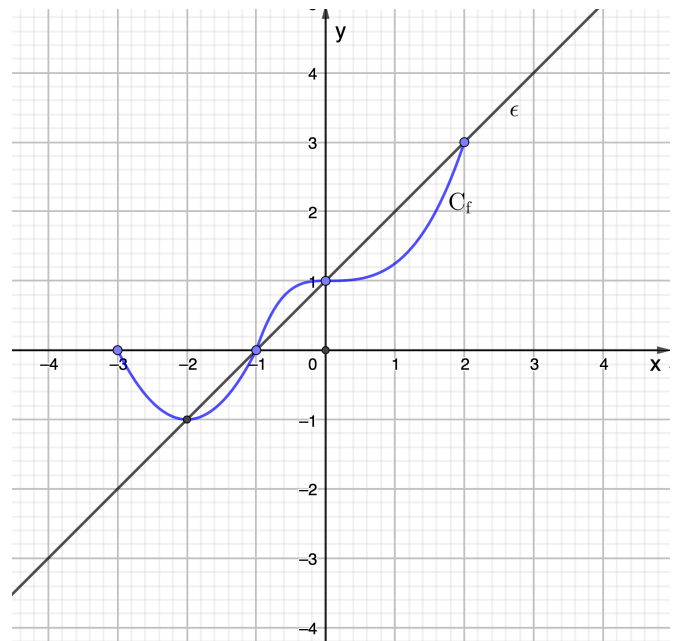
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 1ο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία (ϵ) .

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = x + 1$.
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:
- $f(x) = 0$
 - $f(x) - x - 1 = 0$
 - $f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0$.
- (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x + 1$.
- (ς) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \ln(f(x)) + \sqrt{e^x - 1}.$$

- (ζ) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων, ως προς x , της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.



Θέμα 2ο. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3 - \sqrt{x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(\ln x - 1) = \frac{x}{e} + 2, \quad x > 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.
- (β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $fo g$ και $go f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.
- (γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $g - f$ και την συνάρτηση $\frac{g}{f}$.
- (δ) Αν $h = g - f$, να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

Θέμα 3ο. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- (γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.
- (δ) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) + f(-2x) < f(2x) + f(-x^2)$.
- (ς) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) - f(-f(x)) < f(8) - f(-8)$.

Θέμα 4ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.
- (β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.
- (γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση $\phi(x) - \sin x + 1 = 0$.

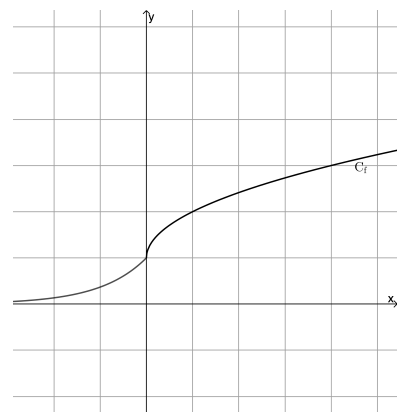
Θέμα 5ο. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ και η συνάρτηση $g: (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{2-x}$.

- (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
- (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με τον άξονα $x'x$.
- (γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) < \frac{x}{e}$.
- (ε) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $g \circ f$.
- (ς) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) \geq 2$, για κάθε $\alpha \in (0, e^2]$.

Θέμα 6ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
- (β) Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} .
- (γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να σχεδιάσετε, πρόχειρα, την ευθεία $y = x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



“Τα μαθηματικά είναι το ταξίδι προς το άπειρο”
David Hilbert, 1862 – 1943, Γερμανός μαθηματικός.