

Επαναληπτικά Θέματα Μονοτονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση 5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

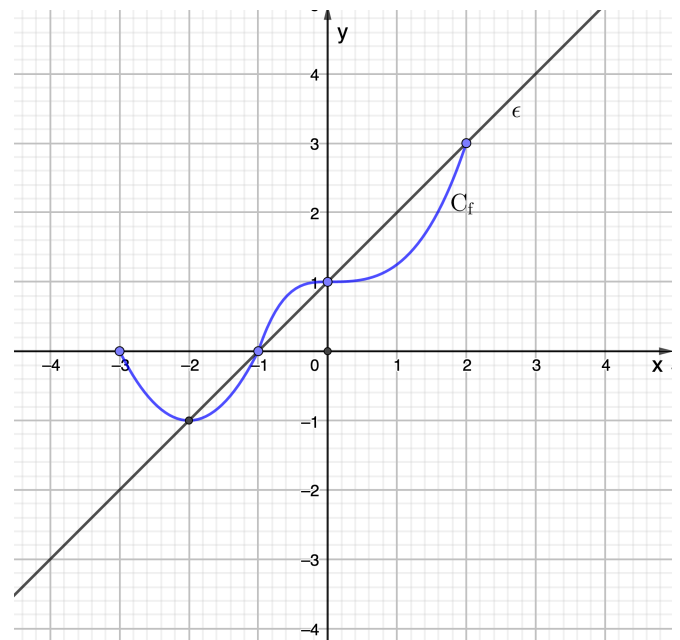
Θέμα 1ο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία (ϵ) .

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = x + 1$.
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - i. $f(x) = 0$
 - ii. $f(x) - x - 1 = 0$
 - iii. $f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0$.

- (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x + 1$.
- (ς) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \ln(f(x)) + \sqrt{e^x - 1}.$$

- (ζ) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων, ως προς x , της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.



Λύση.

- (α) Έστω $\epsilon : y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η εξίσωση της ευθείας (ϵ) . Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η ευθεία (ϵ) διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(0, 1)$.

Άρα, οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της.
Έχουμε:

$$0 = -\alpha + \beta \quad \text{και} \quad 1 = \alpha \cdot 0 + \beta.$$

Άρα, $\alpha = \beta = 1$ και $\epsilon : y = x + 1$.

- (β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τεταγμένων των σημείων της C_f . Άρα, $A = [-3, 2]$.

- (γ) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f . Άρα, $f(A) = [-1, 3]$.

- (δ) i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

- ii. $f(x) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + 1$.

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = x + 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας (ϵ) και της C_f , οπότε έχουμε:

$$f(x) = x + 1 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

- iii.

$$\begin{aligned} f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0 &\Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &f(x)(f(x) - 3) + f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &(f(x) - 3)(f(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &f(x) = 3 \quad \text{ή} \quad f(x) = -1. \end{aligned}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την οριζόντια ευθεία $y = 3$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = -1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την οριζόντια ευθεία $y = -1$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Άρα,

$$f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

- (ε)

$$f(x) \leq x + 1 \Leftrightarrow f(x) = x + 1 \quad \text{ή} \quad f(x) < x + 1.$$

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία ϵ , οπότε έχουμε:

$$f(x) < x + 1 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (0, 2).$$

Άρα,

$$f(x) \leq x + 1 \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [0, 2].$$

- (ς) Η συνάρτηση g ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν:

$$x \in A \quad \text{και} \quad f(x) > 0 \quad \text{και} \quad e^x - 1 \geq 0.$$

Έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \\ \text{και} \\ e^x - 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-3, 2] \\ \text{και} \\ x \in [-1, 2] \\ \text{και} \\ e^x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-3, 2] \\ \text{και} \\ x \in [-1, 2] \\ \text{και} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Άρα, $x \in [0, 2]$.

Οπότε, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $D_g = [0, 2]$.

(ζ) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ είναι το ίδιο με το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = \alpha$. Έχουμε:

- Αν $\alpha < -1$ ή $\alpha > 3$ τότε η ευθεία $y = \alpha$ δεν τέμνει την C_f . Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = -1$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f στο σημείο με συντεταγμένες $(-2, -1)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = -1$ έχει μοναδική λύση την $x = -2$.
- Αν $\alpha = 3$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f στο σημείο με συντεταγμένες $(2, 3)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = 3$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$.
- Αν $0 < \alpha < 3$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f σε ένα σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση.
- Αν $-1 < \alpha \leq 0$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δύο λύσεις.

Θέμα 2ο. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3 - \sqrt{x}, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(\ln x - 1) = \frac{x}{e} + 2, \quad x > 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.
- (β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.
- (γ) Να ορίσετε την συνάρτηση $g - f$ και την συνάρτηση $\frac{g}{f}$.
- (δ) Αν $h = g - f$, να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα x' .

Λύση.

- (α) Θέτουμε $\ln x - 1 = y$, με $x > 0$, οπότε, $\ln x = y + 1$, άρα $x = e^{y+1}$, με $y \in \mathbb{R}$. Η σχέση $g(\ln x - 1) = \frac{x}{e} + 2$ γράφεται $g(y) = \frac{e^{y+1}}{e} + 2 = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$. Επομένως, $g(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.
- (β) Έχουμε $D_f = [0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και $D_g = \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + 2 \in (0, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > -2 >\} = \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x + 2) = 3 - \sqrt{e^x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [0, +\infty) \mid 3 - \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3 - \sqrt{x}) = e^{3 - \sqrt{x}} + 2, \quad x \in [0, +\infty).$$

Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, άρα δεν είναι ίσες.

(γ) Το πεδίο ορισμού της $g - f$:

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $g - f$ έχει τύπο:

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = e^x + 2 - (3 - \sqrt{x}) = e^x + \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 0.$$

Το πεδίο ορισμού της $\frac{g}{f}$:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_f \cap D_g \mid f(x) = 0\} = (0, 9) \cup (9, +\infty),$$

διότι για $x \geq 0$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχει τύπο:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{e^x + 2}{3 - \sqrt{x}}, \quad x \in (0, 9) \cup (9, +\infty).$$

(δ) Έχουμε ότι

$$h(x) = e^x + \sqrt{x} - 1, \quad x \geq 0.$$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_h με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$h(x) = 0, \quad \text{με } x \in [0, +\infty).$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$e^{x_1} < e^{x_2}, \quad \text{αφού } e^x \uparrow \mathbb{R} \tag{1}$$

και

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}, \quad \text{αφού } \sqrt{x} \uparrow [0, +\infty). \tag{2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2). Έχουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + \sqrt{x_1} - 1 < e^{x_2} + \sqrt{x_2} - 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$, δηλαδή το $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$. Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, έχουμε ότι το $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Οπότε, το σημείο $O(0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_h με τον άξονα $x'x$.

Θέμα 3ο. Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.

- (δ) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) + f(-2x) < f(2x) + f(-x^2)$.
 (ς) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) - f(-f(x)) < f(8) - f(-8)$.

Λύση.

- (α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} , οπότε είναι ή γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ή γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 0)$ και $B(0, 8)$, άρα $f(3) = 0$ και $f(0) = 8$.

Αφού $3 > 0$ και $f(3) < f(0)$ η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα και άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

- (β) Έχουμε ότι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \Leftrightarrow x < 3, \text{ αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ αν $x \in (-\infty, 3)$.

Επίσης,

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \Leftrightarrow x > 3, \text{ αφού η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ αν $x \in (3, +\infty)$.

- (γ) Με $x > 0$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(\ln x) > 0 &\Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \\ &\Leftrightarrow \ln x < 3, \text{ αφού η συνάρτηση } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow 0 < x < e^3. \end{aligned}$$

- (δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ f(x_1) > f(x_2), \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x_1) < f(-x_2), \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f(-x_1) > -f(-x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(-x_1) > f(x_2) - f(-x_2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

- (ε) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(x^2) + f(-2x) < f(2x) + f(-x^2) &\Leftrightarrow f(x^2) - f(-x^2) < f(2x) - f(-2x) \\ &\Leftrightarrow g(x^2) < g(2x) \\ &\Leftrightarrow x^2 > 2x, \text{ αφού } g \downarrow \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

- (ς) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} f(f(x)) - f(-f(x)) < f(8) - f(-8) &\Leftrightarrow g(f(x)) < g(8) \\ &\Leftrightarrow f(x) > 8, \text{ αφού } g \downarrow \mathbb{R}, \\ &\Leftrightarrow f(x) > f(0) \\ &\Leftrightarrow x < 0, \text{ αφού } f \downarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Θέμα 4ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.
- (β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.
- (γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
- (δ) Να λύσετε την εξίσωση $\phi(x) - \sin x + 1 = 0$.

Λύση.

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = x^2 - 2x &\Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow f(x + \beta) = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow (x + \beta)^2 + \alpha = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} 2\beta &= -2 \quad \text{και} \quad \beta^2 + \alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha = -1. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$f(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $-1 \neq 1$ και $f(-1) = 0 = f(1)$, συνεπώς η f δεν είναι 1 – 1.

Άρα, η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, έχουμε

$$g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 - 1 = x_2 - 1 \implies x_1 = x_2.$$

Οπότε, η συνάρτηση g είναι 1 – 1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης της συνάρτησης g :

$$g(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $g^{-1}(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

(γ) Οι συναρτήσεις g^{-1} και f έχουν πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

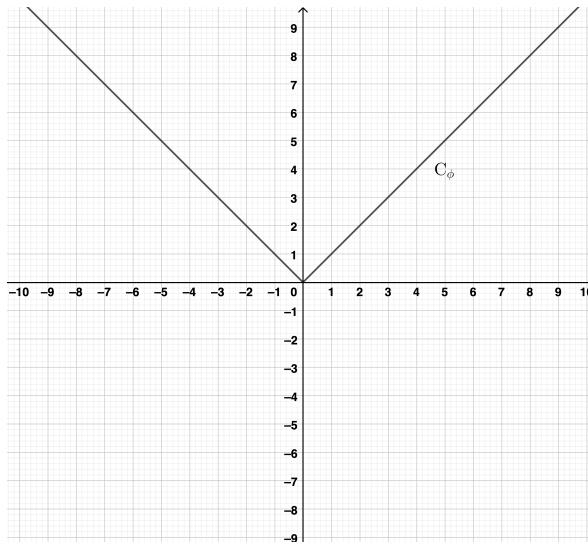
Οπότε, η συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Ισχύει

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 1 = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της ϕ :



- (δ) Για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε: $\phi(x) - \text{συν}x + 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \text{συν}x - 1$.
 Αφού $\text{συν}0 = 1$, το $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης, διότι $|0| = \text{συν}0 - 1$.
 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$-1 \leq \text{συν}x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \text{συν}x - 1 \leq 0.$$

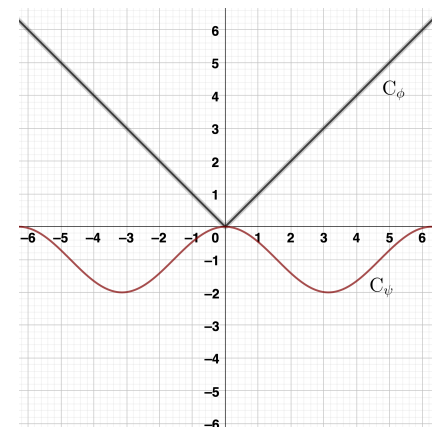
Επειδή, για κάθε $x \neq 0$, ισχύει ότι

$$\text{συν}x - 1 \leq 0 < |x|,$$

η εξίσωση $|x| = \text{συν}x - 1$, έχει μοναδική λύση το $x = 0$.

Σχόλιο:

Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το μοναδικό κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ϕ και ψ , όπου $\phi(x) = |x|$ και $\psi(x) = \text{συν}x - 1$.



Θέμα 5ο. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ και η συνάρτηση $g : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{2 - x}$.

- (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
 (β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με τον άξονα $x'x$.

- (γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης fog με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) < \frac{x}{e}$.
- (ε) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης gof.
- (ς) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) \geq 2$, για κάθε $\alpha \in (0, e^2]$.

Λύση.

(α) Για την συνάρτηση fog, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{2-x} \in (0, +\infty)\} \\ &= \{x \leq 2 \mid \sqrt{2-x} > 0\} \\ &= \{x \leq 2 \mid 2-x > 0\} \\ &= \{x \leq 2 \mid x < 2\} \\ &= (-\infty, 2). \end{aligned}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \ln(\sqrt{2-x}), \quad x \in (-\infty, 2).$$

Για την συνάρτηση gof, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{gof} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \mid \ln x \in (-\infty, 2]\} \\ &= \{x > 0 \mid \ln x \leq 2\} \\ &= \{x > 0 \mid \ln x \leq \ln e^2\} \\ &= \{x > 0 \mid x \leq e^2\} \\ &= (0, e^2]. \end{aligned}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{2 - \ln x}, \quad x \in (0, e^2].$$

(β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_{fog} με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(fog)(x) = 0, \quad x \in D_{fog}.$$

Για $x < 2$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\ln(\sqrt{2-x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2-x = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε, το $M(1, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης fog με τον άξονα $x'x$.

(γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_{fog} και C_f , είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(fog)(x) = f(x), \quad x \in D_{fog} \cap D_f.$$

Για $x \in (0, 2)$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\ln(\sqrt{2-x}) = \ln x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow 2-x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Από τις λύσεις της τελευταίας εξίσωσης ($x = 1, x = -2$), δεκτή είναι το $x = 1$, αφού $x \in (0, 2)$.

Έχουμε, $f(1) = 0 = (fog)(1)$, άρα οι C_{fog} και C_f έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(1, 0)$.

(δ) Η ανίσωση ορίζεται στο $(0, e^2]$ και γράφεται ισοδύναμα :

$$(gof)(x) < \frac{x}{e} \Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e} < 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e}$, $x \in (0, e^2]$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^2]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)

Οπότε,

$$\sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e} < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(e) \Leftrightarrow x \in (e, e^2].$$

(ε) Η συνάρτηση gof είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^2]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)
Άρα, είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.

Με $x \in (0, e^2]$, έχουμε

$$\begin{aligned} (gof)(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} = y, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - \ln x = y^2, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 2 - y^2, \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^{2-y^2}, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Οπότε, $(gof)^{-1}(x) = e^{2-x^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

(ς) Έχουμε

$$\begin{aligned} (gof)^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) \geq 2 &\Leftrightarrow 2 - \ln \alpha + \alpha \ln \alpha \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\alpha \in (0, e^2]$, αφού :

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha - 1 < 0$ και $\ln \alpha < 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha > 0$ και
- αν $1 \leq \alpha \leq e^2$, τότε $\alpha - 1 \geq 0$ και $\ln \alpha \geq 0$, οπότε $(\alpha - 1) \ln \alpha \geq 0$.

α	0	1	e^2
$\alpha - 1$	-	0	+
$\ln \alpha$	-	0	+
$(\alpha - 1) \ln \alpha$	+	0	+

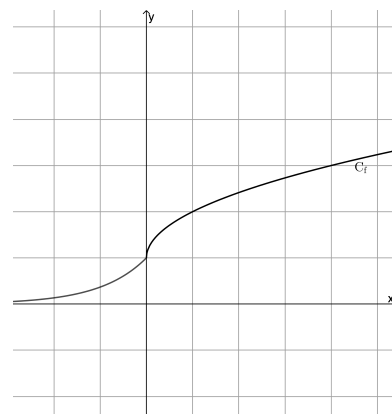
Θέμα 6ο. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

(β) Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} .

(γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να σχεδιάσετε, πρόχειρα, την ευθεία $y = x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

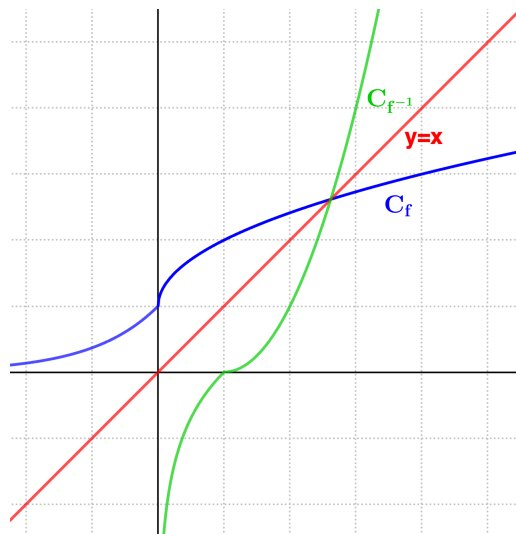


Λύση. (α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από τα σημεία της καμπύλης $y = e^x$ με τετμημένη $x < 0$ καθώς επίσης και από τα σημεία της καμπύλης $y = \sqrt{x} + 1$ με τετμημένη $x \geq 0$. Παρατηρούμε ότι κάθε οριζόντια ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f . Άρα, η συνάρτηση f είναι 1-1.

- (β)
- Αν $x < 0$, έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow e^x = y$.
 Η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο όταν $0 < y = e^x < 1$, (αφού $x < 0$) και ισοδύναμα γράφεται $x = \ln y$, $0 < y < 1$.
 - Αν $x \geq 0$, έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y - 1$.
 Η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο όταν $y - 1 \geq 0$ και ισοδύναμα γράφεται $x = (y - 1)^2$, $y \geq 1$. Δηλαδή,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ (x - 1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

(γ)



“Τα μαθηματικά είναι το ταξίδι προς το άπειρο”
 David Hilbert , 1862 – 1943, Γερμανός μαθηματικός.