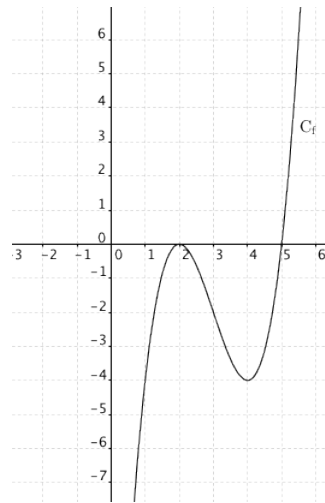


Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο 7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



- | | |
|---|---|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | (ε) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ |
| (β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$ | (ς) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)}$ |
| (γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | (ζ) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{ f(x) }$ |
| (δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ | (η) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x) + 4}$ |

2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|---|---|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2}{\eta\mu^2 x}$ | (γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 3}{x + 1}$ |
| (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ | (δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{ x } \right)$ |

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x + 5}{x^3 - 3x^2 + 4}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | ii. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ |
|----------------------------------|------------------------------------|

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $x^2 f(x) \leq -1$, για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τα όρια:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ f(x) + 3}{f(x) - 3}$ |
|-----------------------------------|--|

5. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Σημείωση

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$,
τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Σημείωση

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
και $f(x) > 0$
κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
και $f(x) < 0$
κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

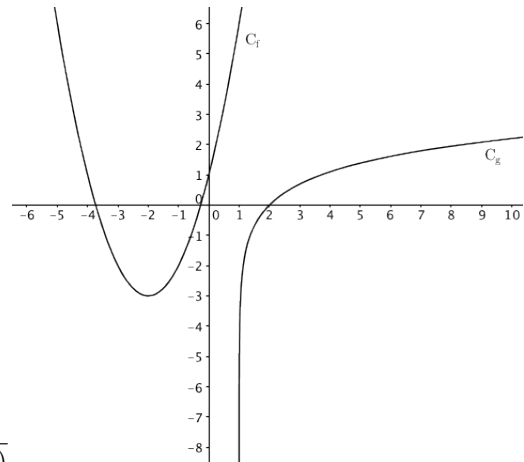
Σημείωση

Αν $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$
τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Σημείωση

Αν $f(x) \leq g(x)$
κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
 Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:



(α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 (β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ (ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$
 (γ) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)}$ (ς) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)g(x)}$

7. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 + x| - |x^3 + 1|}{x^2 + x + 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)$.

8. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x + 1} = -\infty$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$

9. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-2} - e^{\frac{1}{x}})$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
 (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^x}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

Σημείωση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Σημείωση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

10. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{x^2 + x + 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln(2x + 1))$.

11. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{ουν}x}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x$

12. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^3 + (\mu - 2)x^2 + 5}{(\mu - 3)x^2 + 4x + 1}$.

*“Τα Μαθηματικά είναι η ποίηση της σκέψης
 και η ποίηση είναι τα Μαθηματικά της καρδιάς.”*
 Smith, David Eugene, 1860 – 1944, Αμερικανός μαθηματικός.