Συνέχεια Συνάρτησης

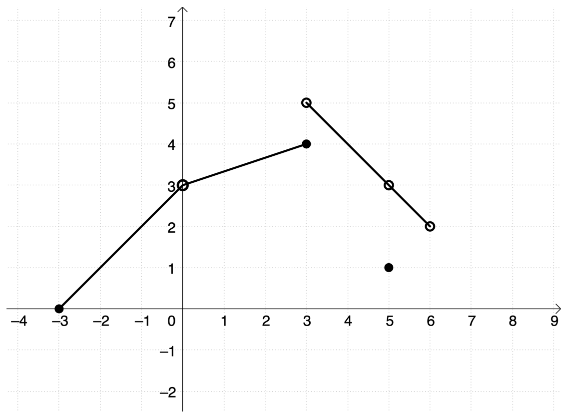
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
   Να βρείτε:

   (α΄) το πεδίο ορισμού της f

   (β΄) τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.



Σημείωση

f συνεχής στο $x_0 \in D_f \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο x_0, τις παρακάτω συναρτήσεις:

   (α΄)
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}2x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

   (β΄)
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - x^2| + x - 9}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 7}, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases}, \quad x_0 = 3$$

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
   $$|f(x)| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
   Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

4. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ και ισχύει:
   $$\text{ημ}2x - x^2 \leq xf(x) \leq \text{ημ}2x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
   να βρείτε το $f(0)$.

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:
   $$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 5.$$
   Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\,(1, 4)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-4x+2=0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-3,2)$.

7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$e^{x_0}+\ln(x_0+1)=2.$$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\,(1,0)$.
Αν $\alpha<1<\beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-\alpha}+\frac{f(\beta)}{\beta-x}=0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α΄) υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$,

(β΄) δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$.

10. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x)=x^2+1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

(β΄) Αν $f(0)=-1$, να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(2)=5$ και

$$f\left(f(x)\right)+f(x)=20,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α΄) $f(5)=15$

(β΄) $f(10)=10$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}^*$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{xe^x-1}{e^x}.$$

(α΄) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2021)e^x=1$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

¨Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών¨

Bacon Roger , $1214-1292$, Άγγλος φιλόσοφος.

Bolzano:
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Σημείωση
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Θ.Ε.Τ
Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών:
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Σημείωση
Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Θ.Μ.Ε.Τ
Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής:
Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η φ παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.
Επίσης, $f([\alpha,\beta])=[m,M]$