

Επανάληψη Ενοτήτων
3.1-3.7, 3.10-3.12 και 3.14
Φύλλο Χριστουγέννων
6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

Αγαπητά μου παιδιά, εύχομαι οι παρακάτω ασκήσεις να αποτελέσουν μια όμορφη μαθηματική συντροφιά τις γιορτινές αυτές ημέρες και να γίνουν αφορμή για μια μικρή επανάληψη. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).
 - (α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι σκαληνό και $A\Delta$ είναι διχοτόμος του, τότε το Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.
 - (β) Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα, που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - (γ) Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι πάντοτε ίσα.
 - (δ) Κάθε διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.
 - (ε) Δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους.
 - (ς) Δεν υπάρχει αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.
 - (ζ) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
 - (η) Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αποστήματα τους είναι ίσα.
 - (θ) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{\varepsilon\chi}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μικρότερη από την γωνία $\hat{\Gamma}$.
 - (ι) Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία.
 - (ια) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
 - (ιβ) Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.
 - (ιγ) Από τρία σημεία ενός κύκλου διέρχεται μοναδική ευθεία.
 - (ιδ) Υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 3$, $\beta = 4$ και $\gamma = 8$.
 - (ιε) Αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία (ϵ) είναι $d = 2$ και η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 3$, τότε η ευθεία (ϵ) είναι εφαπτομένη του κύκλου.
 - (ις) Αν μια ευθεία τέμνει ένα κύκλο, τότε το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία περισσότερο από την ακτίνα.

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

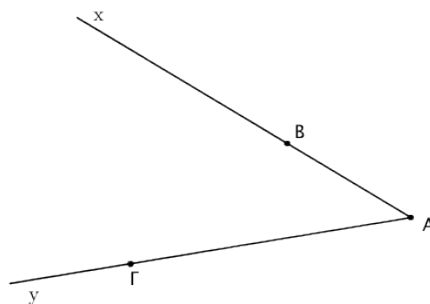
- (α) Το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι και
- (β) Ο είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο.
- (γ) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι η της.
- (δ) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι η του.

Ασκήσεις

(Πράπεζα θεμάτων)

1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- (α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια,
- (β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια,
- (γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.

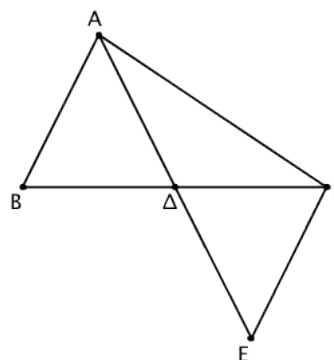


Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- (α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
- (β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AG = AB$.

3. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $DE = AD$. Να αποδείξετε ότι:

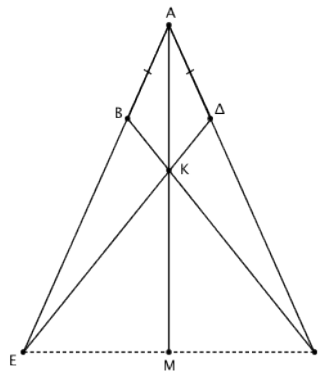


- (α) $AB = GE$,
- (β) $AE < AB + AG$.

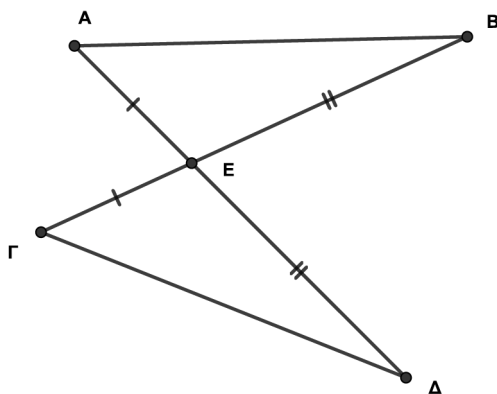
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $AE = AG$. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $AD = AB$. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

(α) $B\Gamma = \Delta E$,

(β) $BK = K\Delta$,

(γ) η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A ,(δ) η AM είναι μεσοκάθετος της EG .

5. Τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E έτσι ώστε $AE = \Gamma E$ και $BE = E\Delta$.



(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.

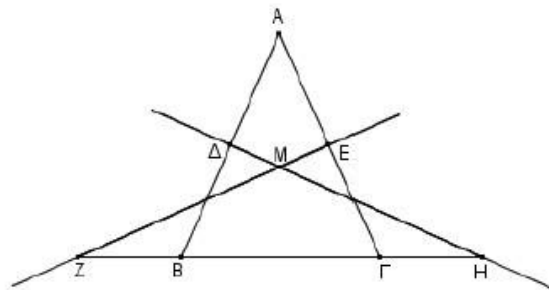
(β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και $E\Theta$ του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, είναι ίσες.

(γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Gamma\Delta$ προς τα A και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

6. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα σημεία Z και H .

(α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$.

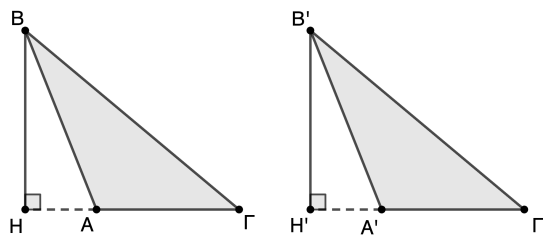
(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.



7. Δίνονται τα αβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A}$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}'$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

(α) $\widehat{BAH} = \widehat{B'A'H'}$.

(β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!

2026 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!