

# Διαγώνισμα Α' Τετραμήνου

## Κεφάλαιο 1ο: Συναρτήσεις

Διάρκεια Εξέτασης: Δύο (2) διδακτικές ώρες

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

15 Ιανουαρίου 2026

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .  
Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της  $f$  ως προς τον άξονα  $y'y$ .

**β)** Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .

**γ)** Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο  $\Delta$ .

**δ)** Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  παίρνει στο  $\Delta$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $f^{-1}$  είναι ίσες.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι  $(f \circ f)(x) = x$ , για κάθε  $x \neq 2$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left( f(x) \eta\mu \frac{1}{2x+1} \right)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως μονότονη και συνεχής.  
Επίσης, ισχύει ότι:

$$f(1) = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{\eta\mu x} = 1.$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$ .

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xf(x)}$ .

**Μονάδες 7**

**Θέμα Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .

**Δ1.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (-1, +\infty)$  τέτοιο, ώστε

$$e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0 + 1}.$$

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Αν  $\alpha \in (-1, x_0)$  και  $\beta \in (x_0, +\infty)$ , όπου  $x_0$  ο πραγματικός αριθμός που αναφέρεται στο ερώτημα Δ2, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{1-x} + \frac{f(\beta)}{x-2} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 2)$ .

**Μονάδες 8**

*Σας εύχομαι επιτυχία!*

*“Μην καταδέχεσαι να ρωτάς:  
Θα νικήσουμε; Θα νικηθούμε;  
Πολέμα!”*

Νίκος Καζαντζάκης, 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.