

Ρυθμός Μεταβολής

11ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = -1$.
- (β) Να βρείτε τις τιμές του x που ο ρυθμός μεταβολής της f , ως προς x είναι θετικός.
- (γ) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της f , ως προς x στο σημείο $x_0 = -1$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 1$.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 1$.
- (γ) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

3. Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το x αυξάνεται με ρυθμό 2cm/s και το y ελλατώνεται με ρυθμό 3cm/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

- (α) της περιμέτρου Π του ορθογωνίου,
- (β) του εμβαδού E του ορθογωνίου τη χρονική στιγμή που είναι $x = 6\text{cm}$ και $y = 10\text{cm}$.

4. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$.

Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O .

Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

(Θέμα Γ3, Επαναληπτικές Πανεληθιαδικές Εξετάσεις 2020)

5. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$.

Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(Θέμα Γ3, Επαναληπτικές Πανεληθιαδικές Εξετάσεις 2016)

Ορισμός

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y , συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Παρατήρηση

$(x^3)' = 3x^2$, όταν η μεταβλητή είναι το x , ενώ $(x^3(t))' = 3x^2(t)x'(t)$, όταν έχουμε "σύνθεση" με μεταβλητή το t .

Σημείωση

Έστω ότι ένα μέγεθος x εξαρτάται από το t . Τότε $x = x(t)$. Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $\alpha > 0$, τότε $x'(t) = \alpha$. Αν το x ελαττώνεται με ρυθμό $\alpha > 0$, τότε $x'(t) = -\alpha$.

6. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Καθώς το σημείο M περνάει από το σημείο $A(2, 4)$, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3cm/s .

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M τη χρονική στιγμή που περνάει από το A .

7. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2 + 1$, $x \geq 1$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΜΟΚ$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

(Θέμα Γ4, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2019)

8. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}.$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B .

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

(Θέμα Γ4, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2020)

9. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = 2x - 2$. Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου $ΜΚΓ$, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

(Θέμα Γ3, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2022)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, $x \geq 0$.

Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$.

Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

(Θέμα Γ4, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2025)

“Ο Αρχιμήδης θα μνημονεύεται, όταν ο Αισχύλος θα έχει ξεχαστεί, γιατί, ενώ οι γλώσσες πεθαίνουν, οι μαθηματικές ιδέες είναι διαχρονικές.”

Godfrey Harold Hardy, 1877-1947, Άγγλος μαθηματικός.