Θεώρημα του Rolle

12ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θεώρ. Rolle

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(β') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\varepsilon\varphi x = 1$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

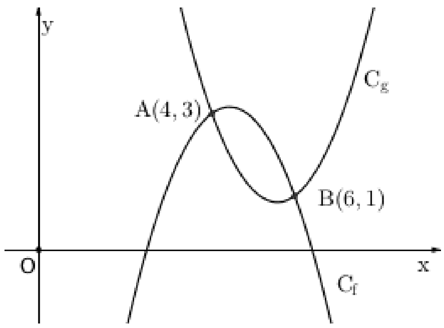
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \kappa x + \lambda, & -1 \le x < 0 \\ \mu x^2 + 2x + 2, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και μ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$.

Σημείωση

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του εν Ρολλε : Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα xx'. (οριζόντια εφαπτομένη)

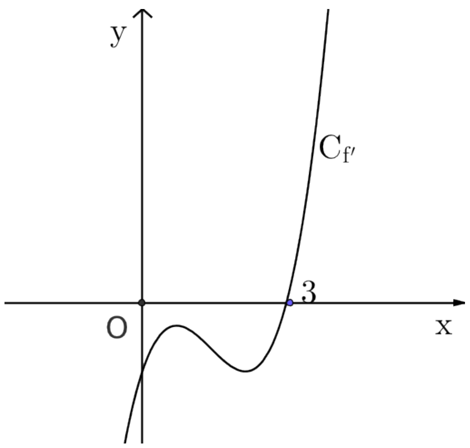
3. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες τέμνονται στα σημεία $A(4, 3)$ και $B(6, 1)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (4, 6)$ τέτοιο, ώστε οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $M(\xi, f(\xi))$ και $N(\xi, g(\xi))$ να είναι μεταξύ τους παράλληλες.



4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Θεωρείστε τον ισχυρισμό:
" *Ισχύει ότι* $f(0) = f(3)$ ".

(α') Να εξετάσετε αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής.

(β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').



5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(3) - f(2) = 5$.
Να αποδείξετε ότι:

   (α') η συνάρτηση
   $$g(x) = f(x) - x^2, \;\; x \in \mathbb{R}$$
   δεν είναι $1-1$,

   (β') υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε
   $$f'(\xi) = 2\xi.$$

Σημείωση

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β), τότε:
- βρίσκουμε προφανή ρίζα στο (α, β), ή
- εφαρμόζουμε θεώρημα του Bolzano για την f στο $[\alpha, \beta]$, ή
- βρίσκουμε το σύνολο τιμών $f((\alpha, \beta))$ και ελέγχουμε αν το 0 ανήκει σε αυτό (θεώρημα ενδιαμέσων τιμών), ή
- εφαρμόζουμε το θεώρημα του Rolle σε μια συνάρτηση g όπου $g'(x) = f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$5x^4 - 4x + 1 = 0,$$
έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$2x^3 - 3x^2 + 5 = 0,$$
έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Σημείωση

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα, τότε:
- υποθέτουμε ότι έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1 < \rho_2$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle οδηγούμαστε σε άτοπο,

ή
- αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$x^4 + e^x = 3x + 10,$$
έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

9. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$5^x = 4x + 1,$$
έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

11. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$$f(x) = 3^x, \;\; x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = -x^2 + 3x + 1, \;\; x \in \mathbb{R}$$
έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα $A\,(0,1)$ και $B(1,3)$.

Σημείωση

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα, τότε:
- την ύπαρξη της ρίζας την εξασφαλίζουμε με ένα από τους τρόπους που περιγράψαμε παραπάνω,

και
- την μοναδικότητα την εξασφαλίζουμε είτε με την μονοτονία είτε υποθέτοντας ότι η εξίσωση έχει 2 ρίζες και οδηγούμαστε σε άτοπο εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle για την f.

12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$2x^2 - \text{συν}x = x\text{ημ}x,$$
έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

¨ Ένα μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μας κινητοποιεί, όχι εντελώς απρόσιτο ώστε να βρίσκεται πέρα από τις δυνατότητες μας. Πρέπει να λειτουργεί ως οδηγός στα δαιδαλώδη μονοπάτια της κρυμμένης αλήθειας και ως υπόμνηση της χαράς μιας επιτυχούς λύσης. ¨

David, Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.