Θεώρημα του Rolle
Θεώρημα Μέσης Τιμής
Ολιγόλεπτη γραπτή δοκιμασία

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο: .....

Βαθμός: .....

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Μονάδες 30

Α2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), ισχύει ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) με $f(\alpha) < f(\beta)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f που έχει θετική κλίση.

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{-x} - 2x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Μονάδες 25

Β2. Έστω συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με την h' γνησίως φθίνουσα.
Να αποδείξετε ότι

$$h'(1) + h(0) < h(1).$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Μονάδες 25

Σας εύχομαι επιτυχία!