Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θ.Μ.Τ.Δ.Λ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Σημείωση

Γεωμετρική Ερμηνεία του Συμπεράσματος του Θ.Μ.Τ.Δ.Λ: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

(α') Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-2, 2]$.

(β') Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, να προσδιορίσετε τα $\xi \in (-2, 2)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(-2)}{4}.$$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(2) < f(3).$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) > 0,$$

(β') υπάρχει σημείο M της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$$f'(x) = e^{x^2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') $f'(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β') $f(\beta) - f(\alpha) \geq \beta - \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \leq \beta$.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad |f'(x)| \leq 2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$-7 \leq f(5) \leq 9.$$

5. Έστω $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

   (α') $\mathrm{f}(2) + \mathrm{f}(3) < \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(4)$, (β') $\mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(3) > 2\mathrm{f}(2)$.

6. Έστω η συνάρτηση
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \ln \mathrm{x}, \quad \mathrm{x} > 0.$$
Να αποδείξετε ότι:

   (α') η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

   (β') $\dfrac{1}{6} < \ln\left(\dfrac{6}{5}\right) < \dfrac{1}{5}$.

7. Έστω $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι:

   (α') $2\mathrm{f}(\mathrm{x}+1) > \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(\mathrm{x}+2)$, για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$,

   (β') $\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}(3\mathrm{x}) < 2\mathrm{f}(2\mathrm{x})$, για κάθε $\mathrm{x} > 0$.

8. Να αποδείξετε ότι:

   (α') $\left|\eta\mu\sqrt{\mathrm{x}+1} - \eta\mu\sqrt{\mathrm{x}}\right| \leq \left|\sqrt{\mathrm{x}+1} - \sqrt{\mathrm{x}}\right|$, για κάθε $\mathrm{x} > 0$,

   (β') $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \left(\eta\mu\sqrt{\mathrm{x}+1} - \eta\mu\sqrt{\mathrm{x}}\right) = 0$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι:
$$\mathrm{f}(\alpha) = \beta \text{ και } \mathrm{f}(\beta) = \alpha, \text{ με } \alpha < \beta,$$
να αποδείξετε ότι:

   (α') υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε
$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0,$$

   (β') υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοια, ώστε
$$\mathrm{f}'(\xi_1) \cdot \mathrm{f}'(\xi_2) = 1.$$

10. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f' είναι $1-1$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν.

¨Ο μαθηματικός, όπως ένας ζωγράφος ή ένας ποιητής, είναι ένας σχεδιαστής. Αν τα έργα που σχεδιάζει είναι διαχρονικότερα από εκείνων, αυτό οφείλεται στο ότι είναι φτιαγμένα από ιδέες¨.
Hardy, Godfrey Harold, $1877 - 1947$, Άγγλος μαθηματικός.