Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής

14ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι
$$f'(x) = -2xf(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$
   (α') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$g(x) = f(x)e^{x^2}, \;\; x \in \mathbb{R}$$
   είναι σταθερή.
   (β') Αν $f(1) = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Θεωρ. Σελ 133

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,
τότε η f είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα Δ .

2. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν:
   (α') $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^x + x^2 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   (β') $f(0) = 1$ και $f'(x) = e^{2x} + ημx + e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   (γ') $f(0) = -1$ και $f'(x) = συνx - x\, ημx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   (δ') $f(0) = 0$ και $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   (ε') $f(4) = 5$ και $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
   (ϛ') $f(0) = \ln 2$ και $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.
   Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:
$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 1 \\ \dfrac{2}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$
   Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Πορ. Σελ 133

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ.
Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει
$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2x, \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
   Αν $f(2) = 4$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Σημείωση

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$f(x)f'(x) = e^{2x}, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$
Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Σημείωση

$\left(f^2(x)\right)' = 2f(x)f'(x)$

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$x^2f'(x) + 2xf(x) = x^2f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)\,.$$
Αν $f(1) = e$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Σημείωση

Αν για μια συνάρτηση g ισχύει η σχέση $g'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x) = ce^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α') $f(x) = x^3 - x^2 + 6x - 7,\ x \in \mathbb{R}$

(β') $f(x) = συνx - 2x,\ x \in \mathbb{R}$

(γ') $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2x,\ x \in \mathbb{R}$

(δ') $f(x) = e^x + x + συνx,\ x \in \mathbb{R}$

(ε') $f(x) = e^{2x} - 4x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

(ϛ') $f(x) = 2xe^x - x^2 - 2x,\ \ x \in \mathbb{R}.$

Θεωρ. Σελ 135

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

8. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{αν } x \le 1 \\ 3 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}.$$

9. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση
$$f(x) = \frac{ημx}{x}, \qquad x \in (0, \pi).$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln(x - 2) - 9,\ x > 2.$

(α') Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f.

(β') Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x - 2) > 9 - x^2$.

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

(α') $x^3 - x^2 + 3x < 10$

(β') $x + \ln x < 1$

(γ') $x^3 + x + συνx < 1$

(δ') $\frac{2}{x} - 2 < \ln x.$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - x - 5,\ \ x \in \mathbb{R}.$

(α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(β') Να λύσετε την ανίσωση $\frac{10}{x^2 + 1} > x.$

(γ') Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(δ') Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x = -2016$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x + 2}\right).$

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(β') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

(δ') Να βρείτε την f^{-1}.

¨*Η υψηλότερη μορφή καθαρής σκέψης, είναι τα Μαθηματικά*¨.
Πλάτων, 427 π.Χ-347 π.Χ, Έλληνας φιλόσοφος.