Συνέπειες του Θεωρήματος
της Μέσης Τιμής
Ολιγόλεπτη γραπτή δοκιμασία

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο: .....

Βαθμός: .....

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Μονάδες 40

Α2. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ.

ii. Για όλες τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = ce^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \text{συν}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης f.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Μονάδες 25

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\text{συν}x = 2 - x^2$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Μονάδες 15

Σας εύχομαι επιτυχία!

¨ Αν στις άλλες επιστήμες θέλουμε να καταλήγουμε σε βεβαιότητα χωρίς αμφιβολία, σε αλήθεια χωρίς σφάλμα, πρέπει να θέσουμε τα θεμέλια της γνώσης στα Μαθηματικά. ¨
Bacon, Roger, 1214-1292 , Άγγλος φιλόσοφος.