

Κυρτότητα

16ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

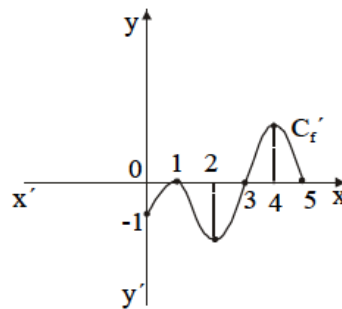
1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$.

- (α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Θέμα 2ο, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2004)

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε:

- (α) τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της,
- (β) τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμπής της γραφικής της παράστασης.



3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την παραπάνω συνάρτηση f .

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις:

- (α) $\phi(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$
- (β) $f(x) = -e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$
- (γ) $g(x) = x - \ln(3x), x > 0$
- (δ) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}, x \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει τρία σημεία καμπής και τα δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Σημείωση

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ισχύει ότι: Αν $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Σημείωση

Η συνάρτηση f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ . Η συνάρτηση f είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Σημείωση

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Σημείωση

Η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο καμπής της διαπερνά την C_f .

6. Αν το σημείο $A(-1, 4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 5x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 5x + 3}$

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad x \in (-1, 1).$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .

(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2x}.$$

9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

(α) το x_0 είναι μοναδικό,

(β) το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f .

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

(γ) Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

(δ) Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

11. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

“Τα Μαθηματικά είναι χωρίς καμιά αμφιβολία η μόνη οικουμενική γλώσσα”.

Connes, Alain, 1947–, Γάλλος μαθηματικός.

Σημείωση

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε $f''(x_0) = 0$.

Σημείωση

Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , τότε η C_f είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$, εξαιρουμένου του σημείου επαφής.