

## Επαναληπτικές Ασκήσεις

### 1ο και 2ο Κεφάλαιο

### 18ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

#### Ερωτήσεις Κατανόησης

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $-f$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .
- (β) Κάθε συνάρτηση που είναι  $1-1$  στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- (γ) Οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ .
- (δ) Κάθε συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία δεν είναι γνησίως μονότονη, δεν είναι και  $1-1$ .
- (ε) Αν  $f$  και  $g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- (ς) Αν υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$  και είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
- (ζ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$ .
- (η) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ή  $+\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
- (θ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ .
- (ι) Για κάθε συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

- (ια) Για κάθε συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .
- (ιβ) Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.
- (ιγ) Κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
- (ιδ)  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- (ιε) Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}^*$ .
- (ις) Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , ισχύει ότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$ .
- (ιζ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό της ελάχιστο.
- (ιη) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ .
- (ιθ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f'$  είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της  $f$ .
- (ικ) Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  είναι θέση τοπικού ακροτάτου της  $f$ .
- (ικα) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της  $C_f$  "διαπερνά" την καμπύλη.
- (ικβ) Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε ένα σημείο καμπής.
- (ικγ) Μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να έχει δύο κοινά σημεία με την  $C_f$ .
- (ικδ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

### Θέματα

- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-2}{\ln x}$ ,  $x > 0$  και  $x \neq 1$ .
  - Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.
  - Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 2021$ .
  - Να λύσετε την εξίσωση  $f(x^2 + 2) = f(x^2 + 2x + 4)$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ ,  $x \neq 0$ .
  - Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
  - Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
  - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .
  - Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .
- Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x = -1$  τοπικό ακρότατο και η εφαπτομένη της στο σημείο  $A(2, f(2))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\eta : y = 9x + 2021$ .
  - Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 0$ .
  - Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^3 = 3x - 1$  έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από το σημείο  $B(0, 3)$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1-x}{x} - \ln x, x > 0$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(0, 2)$ .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f^2(x) - 2f(x) + 2xf(x) = 0$ .

5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

(α) Να βρείτε τα  $A$  και  $f(A)$ .

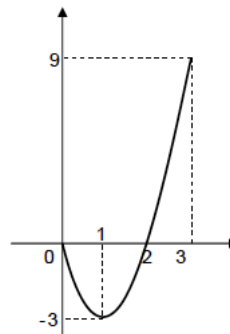
(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^2(x) + 3f(x) = 0.$$

(γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \alpha$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       iii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$   
 ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) + 3}$



6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει ακριβώς μία θετική ρίζα  $x_0$ .

(β) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - \frac{2}{1+f^2(x)} > 0$ .

(γ) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \ln(1-x), x \in (0, 1)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της,  $f^{-1}$ .

(β) Αν  $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση  $g$ .

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της  $g$  ως προς  $x$ .

8. Έστω η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει  $f(x) \geq x^2 - x + 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(α) i. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
 ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες.  
 iii. Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq \frac{3}{4}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(β) Αν επιπλέον  $f(1) = 1$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ , να αποδείξετε ότι :

- i.  $f' \left( \frac{1}{2} \right) = 0$ , ii. η f δεν είναι κοίλη.

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$ .
- $f'(x)f''(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- (α) i. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 1$ .  
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$ .
- (β) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- (δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$ .

(Θέμα Γ, Επαναληπτικές Πανελληδικές Εξετάσεις 2022)

10. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  είναι ίση με 2, τότε να αποδείξετε ότι:

- (α)  $\alpha = 1$ ,
- (β) η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της,  $f^{-1}$ .  
 Αν  $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 1$ ,  $x \in [-1, +\infty)$ , τότε να βρείτε:
- (γ) τη συνάρτηση  $f^{-1} \circ g$ ,
- (δ) το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$ , όπου  $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελληδικές Εξετάσεις 2020)

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ .
- (β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $x_0 = 0$  είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.
- (γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- (δ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(Θέμα Γ, Τέκνων Ελλήνων Εξωτερικού, Πανελληδικές Εξετάσεις 2020)

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α)  $f(0) = -3,$
- (β)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$
- (γ) υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός πραγματικός αριθμός  $x_0$  τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = e^{-x_0}.$$

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^2 + \beta x + \gamma,$   $x \in \mathbb{R},$  όπου τα  $\beta$  και  $\gamma$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x = 0$  το  $f(0) = 3.$

- (α) Να αποδείξετε ότι  $\beta = 0$  και  $\gamma = 3.$

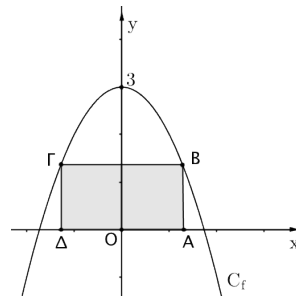
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta,$  όπου  $B(x, f(x)),$  με  $x \in (0, \sqrt{3}).$

- (β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta,$  συναρτήσει του  $x,$  είναι

$$E(x) = -2x^3 + 6x, \quad x \in (0, \sqrt{3}).$$

- (γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται μέγιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

- (δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει  $x_0 \in (0, \sqrt{3})$  για το οποίο το εμβαδόν  $E(x_0)$  του α-



ντίστοιχου ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  ισούται με  $4e^{x_0} + 1.$

14. Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με  $f(0) = 1$  και ισχύει:  $f(x) \geq x + 1,$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}.$

- (α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x = 0.$
- (β) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((f(x) - 1) \ln x).$

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & \text{για } x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & \text{για } x < 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

- (α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1.$
- (β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (γ) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0,$  η οποία είναι αρνητική.  
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty).$
- (δ) Ένα σημείο  $M(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x), x \geq 1.$  Την χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 10),$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.  
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $MOK$  τη χρονική στιγμή  $t_0,$  όπου  $K(x, 0)$  και  $O(0, 0).$

(Θέμα Γ, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2019)

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με  $\alpha > 1$ .

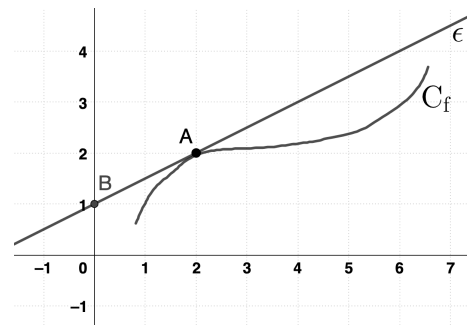
- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\alpha > 1$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- (β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f$  να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x_2$ .
- (γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(1)$  είναι αδύνατη στο  $(\alpha, x_2)$ .

(Θέμα Δ, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2018)

17. Στο σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Η ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο της  $A(2, 2)$  και διέρχεται από το σημείο  $B(0, 1)$ .

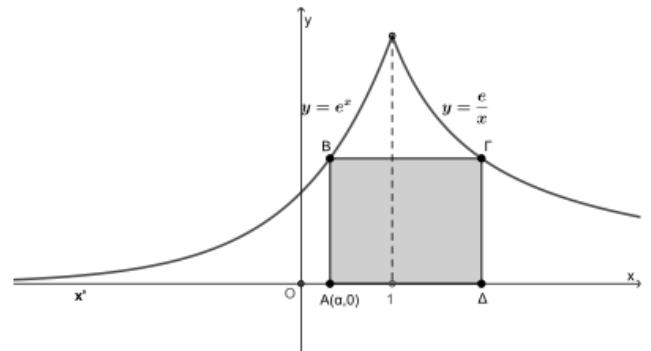
Να βρείτε:

- (α) την τιμή  $f'(2)$ ,
- (β) το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + 3h) - 2}{h}$ ,
- (γ) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - x^2}{x^2 - 4}$ ,
- (δ) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = f^2(x) + f(x^2 - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  στο σημείο  $M(2, g(2))$ .



18. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  έχει τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$  πάνω στον άξονα  $x'x$  και τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = e^x$ ,  $x < 1$  και  $g(x) = \frac{e}{x}$ ,  $x > 1$ , αντίστοιχα. Έστω  $A(\alpha, 0)$  με  $\alpha < 1$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι:
  - i. η τετμημένη της κορυφής  $\Delta$  είναι  $x_\Delta = e^{1-\alpha}$ ,
  - ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ .
- (β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .
- (γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του  $\alpha$ , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  γίνεται ίσο με 1.



### Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!