

Παράγουσα Συνάρτηση Ορισμένο Ολοκλήρωμα Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού 19ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x) = |x| + 1, x \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x < 3 \\ 3, & x \geq 3 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^7 f(x)dx$.

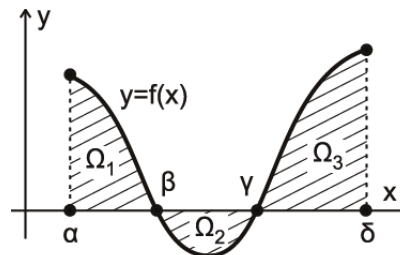
4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [\alpha, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι:

$$E(\Omega_1) = 2, \quad E(\Omega_2) = 1 \quad \text{και} \quad E(\Omega_3) = 3,$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (γ) $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$

(β) $\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$ (δ) $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$



5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

$$\int_0^1 f(x)dx = 3, \quad \int_0^6 f(x)dx = 4 \quad \text{και} \quad \int_2^6 f(x)dx = 3.$$

Ορισμός

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ονομάζουμε **αρχική παράγουσα** συνάρτηση της f στο Δ κάθε συνάρτηση F η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ και τέτοια, ώστε $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Σημείωση

Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με άθροισμα των εμβαδών των χωρίων πάνω από τον άξονα $x'x$, μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Σημείωση

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος στην σελίδα 214.

Σημείωση

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega)$, όπου Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Σημείωση

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_1^2 f(x)dx$ (β) $\int_1^6 f(x)dx$ (γ) $\int_2^0 (f(x) + 3)dx$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_0^2 x^3 dx$ (β) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$ (γ) $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 1)dx.$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (β) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$ (γ) $\int_0^1 \frac{2}{x+1} dx.$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_0^{2\pi} \eta \mu x dx$ (β) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx$ (γ) $\int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu x \cdot e^{\sigma \nu \nu x} dx.$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_{-1}^1 e^{4x} dx$ (β) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3} dx$ (γ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon \phi x dx.$

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_{-1}^1 |x| dx$ (β) $\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$ (γ) $\int_{-1}^0 |e^x - 1| dx.$

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x)dx.$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_0^2 \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 3} dx$ (β) $\int_{-1}^0 \frac{6x - 12}{x^2 - 4x + 3} dx.$

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx$ (β) $\int_{-1}^0 \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$ (γ) $\int_0^1 \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} dx.$

“ Η ομορφιά είναι το καθοριστικό κριτήριο. Δεν υπάρχει θέση στον κόσμο για άσχημα Μαθηματικά. ”

Hardy, Godfrey Harold , 1877 – 1947, Άγγλος μαθηματικός.

Σημείωση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx.$$

Σημείωση

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

Θεώρημα

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού:
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε:
 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha).$

Σημείωση

Για τον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης εξετάζουμε αρχικά αν ο αριθμητής είναι παράγωγος ή κάποιο αριθμητικό πολλαπλάσιο της παραγώγου του παρονομαστή.