Μέθοδοι Ολοκλήρωσης
Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου
20ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ $\left(\text{απ. } 2-\frac{5}{e}\right)$

(β') $\int_0^1 (x^2-1)e^{2x}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{1-e^2}{4}\right)$

(γ') $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{1}{2}\right)$

(δ') $\int_0^\pi x\sigma\upsilon\nu 2x dx$ $\left(\text{απ. } 0\right)$

(ε') $\int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx$ $\left(\text{απ. } -\frac{e^\pi+1}{2}\right)$

(ϛ') $\int_0^\pi e^{-x}\eta\mu x dx$ $\left(\text{απ. } \frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)$

Σημείωση

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$ $\left(\text{απ. } 2\sqrt{2}-2\right)$

(β') $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{26}{3}\right)$

(γ') $\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx$ $\left(\text{απ. } -\frac{4}{15}\right)$

(δ') $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ $\left(\text{απ. } \ln\frac{e+1}{2}\right)$

(ε') $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ $\left(\text{απ. } \frac{8}{3}\right)$

(ϛ') $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$ $\left(\text{απ. } 2e^2\right)$

Σημείωση

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(α') $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\eta\mu x}dx$ $\left(\text{απ. } \sqrt{2}\right)$

(β') $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ $\left(\text{απ. } \ln\sqrt{3}\right)$

(γ') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x dx$ $\left(\text{απ. } \frac{2}{3}\right)$

4. (α') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$

(β') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 0$

(γ') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

(β') Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f^{-1}(x)dx$.

6. Να αποδείξετε ότι: $2 < \int_0^2 \sqrt{x^2+4}dx < \sqrt{5}$.

7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1) = f'(1) = 1$.

(α') Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(β') Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x)dx < 6$.

Σημείωση

Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx$ Αν επιπλέον ισχύει ότι οι f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta f(x)dx$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, $x > 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Σημείωση

Το εμβαδόν χωρίου Ω που περικλείεται από την $\mathbf{C_f}$ μιας συνεχούς συναρτήσεως f, τον άξονα $\mathbf{x'x}$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, δίνεται από το $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx$

9. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \leq 1 \\ -6x+12, & x \geq 1 \end{cases}$ και τον άξονα των x.

10. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση

Το εμβαδόν χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g δύο συνεχών συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, με $\alpha < \beta$, δίνεται από το $\int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|\,dx$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(β') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία (ϵ).

12. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και C_g με την ευθεία $\epsilon:\ y = e$.

(β') Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία (ϵ).

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\epsilon : y = \dfrac{1}{4}$, στο $x_0 = 0$,
- είναι κυρτή και
- $f(1) = 1$.

(α') Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0) = \dfrac{1}{4}$ και $f'(0) = 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4f(x)-1}{ημx f(x)} = 0$.

(β') Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

¨Αν νιώθω λυπημένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να γίνω ευτυχής. Αν είμαι ευτυχισμένος, ασχολούμαι με τα Μαθηματικά για να με κρατήσουν ευτυχισμένο.¨

Renyi Alfred, 1921 − 1970, Ούγγρος μαθηματικός.