

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Γενικό Λύκειο Θήρας

9 Μαΐου 2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$.

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

iii. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο \mathbb{R}^* .

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ν. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

B1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + e^{\alpha-1} - \frac{3}{2}, & x < 1 \\ \ln x + \ln \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, 0)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - x + 1}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0 e^{x_0}$.

Μονάδες 10

Δ2. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης

$$f^2(x) - (e + e^e) f(x) + e^{1+e} = 0.$$

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία!