Πραγματικοί Αριθμοί

2ο φύλλο εργασίας

Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Ημερομηνία: .....

Στόχοι Εφαρμόζω ιδιότητες πράξεων και δυνάμεων και βασικές ταυτότητες.
Κατανοώ την ισοδυναμία, τη συνεπαγωγή και τους συνδέσμους «ή», «και».
Χρησιμοποιώ απαγωγή σε άτοπο και αντιπαραδείγματα.

Οι αναλυτικές λύσεις γράφονται στο τετράδιο.

Ιδιότητες των πράξεων.

Άσκηση 1

Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα, για $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητες των πράξεων		
Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta =$	$\alpha \cdot \beta =$ .....
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) =$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) =$ .....
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + \ldots = \alpha$	$\alpha \cdot \ldots = \alpha$
Συμμετρικό στοιχείο	$\alpha + (\ldots) = (\ldots) + \alpha = 0$ Ο $-\alpha$ λέγεται **αντίθετος** του α.	$\alpha \cdot \ldots = \frac{\ldots}{\ldots} = 1,\ \alpha \neq 0.$ Ο $\frac{1}{\alpha}$ λέγεται **αντίστροφος** του α.
Επιμεριστική ιδιότητα	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) =$	

Άσκηση 2

Να συμπληρώσετε τα κενά και να αιτιολογήσετε προφορικά.

α) Αν $\alpha < 0$, τότε $-\alpha$ ..... 0. Ο αντίστροφος του -1 είναι .....

β) Αν οι α, β είναι ομόσημοι, τότε $\alpha\beta$ ..... 0.

γ) Ο αντίθετος του $\alpha - \beta$ είναι ..... Ο αντίστροφος του $\frac{1}{5}$ είναι .....

δ) $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$ ..... Μπορούν να είναι και οι δύο μηδέν;

ε) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow$ .....

στ) Αν $\alpha + \beta = 0$, ισχύει υποχρεωτικά $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$; Αν όχι, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Άσκηση 3

Δίνεται η παράσταση $A = 1 + 3(2\alpha - 3\beta) - 2(\alpha - \beta) - \beta$.

α) Να απλοποιήσετε την A.

β) Για $\alpha = \dfrac{1}{2}$ και $\beta = -\dfrac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της.

Αντίθετοι αριθμοί: το άθροισμά τους είναι 0.

Άσκηση 4

Για $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ δίνονται $A = \alpha - 3\beta + 4\gamma$, $B = \beta - \alpha - 2\gamma$.

α) Αν οι A, B είναι αντίθετοι, να δείξετε ότι $\beta = \gamma$.

β) Ισχύει το αντίστροφο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Αντίστροφοι αριθμοί: το γινόμενό τους είναι 1.

Άσκηση 5

Οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι και έχουν άθροισμα 2.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha(3 - \beta) + \beta(3 - \alpha)$.

Νικόλαος Δ. Κατσίπης
www.nikolaoskatsipis.gr

Προτεραιότητα πράξεων.
Για $a \neq 0$: $a^0 = 1$, $a^{-\nu} = \frac{1}{a^\nu}$.

Άσκηση 6

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων.

α) $A = 4 - 4 \cdot 2 - 3(7 - 8)$

β) $B = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

γ) $\Gamma = (-4)^2 \cdot 2^{-1} - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

δ) $\Delta = (-1)^{2026} - (-1)^{2027} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 2^2$

Ιδιότητες δυνάμεων.
Για $a \neq 0$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$: $a^\mu a^\nu = a^{\mu+\nu}$, $(a^\mu)^\nu = a^{\mu\nu}$

Άσκηση 7

Για $a, \beta \neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

α) $\frac{(a^2)^3 \cdot a}{a^4}$ **β)** $(a^2\beta^3)^{-2}(a\beta)^4$ **γ)** $(2a)^3 : \left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$

Στο (β) να αναφέρετε τις ιδιότητες των δυνάμεων που χρησιμοποιείτε.

Λόγοι αριθμών.
Σχολικό βιβλίο, σ. 50.

Άσκηση 8

Δίνεται ότι $\frac{a}{\beta} = \frac{3}{2}$. Να υπολογίσετε τις τιμές:

α) $\frac{4a}{3\beta}$ **β)** $\frac{a-\beta}{2a}$ **γ)** $\frac{a+\beta}{a-\beta}$

Ταυτότητες

Άσκηση 9

Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες.

α) $(-a-\beta)^2 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$

β) $(a+\beta+\gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a\beta + 2a\gamma + 2\beta\gamma$

γ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4, \quad x \neq 0.$

Απαγωγή σε άτοπο.
Σχολικό βιβλίο, σ. 48–49.

Άσκηση 10

Αν $a \in \mathbb{Z}$ και ο a^2 είναι περιττός, να αποδείξετε ότι ο a είναι περιττός.

Υπόδειξη: Τι θα συνέβαινε για τον a^2, αν ο a ήταν άρτιος;

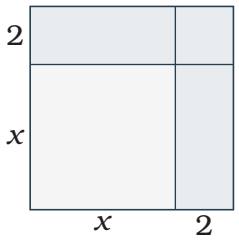
Από το σχήμα στην παράσταση.

Άσκηση 11

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά x μέτρα, με $x > 0$. Αυξάνουμε την πλευρά του κατά 2 μέτρα.

α) Να εκφράσετε αλγεβρικά την αύξηση του εμβαδού.

β) Με τη διαμέριση του σχήματος, να εξηγήσετε γιατί η αύξηση είναι $4x + 4$ τετραγωνικά μέτρα.



Αλγεβρική παράσταση.

Άσκηση 12

Δίνεται $A = x - x(x^2 - x) - (x-3)(2x+1)$. Να απλοποιήσετε την A και να βρείτε την τιμή της για $x = -\frac{1}{2}$.

Τράπεζα Θεμάτων 13088

Άσκηση 13

Για $x, y \in \mathbb{R}$ δίνεται $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^2$.

β) Χρησιμοποιώντας το (α), χωρίς μεγάλες αριθμητικές πράξεις, να γράψετε την παράσταση $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ ως τετράγωνο φυσικού αριθμού και να προσδιορίσετε τον αριθμό αυτό.

«Αν οι αριθμοί δεν είναι όμορφοι, δεν ξέρω τι είναι όμορφο.»

Paul Erdős, 1913–1996, Ούγγρος μαθηματικός