Διανύσματα

2ο φύλλο εργασίας

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Ημερομηνία: .....

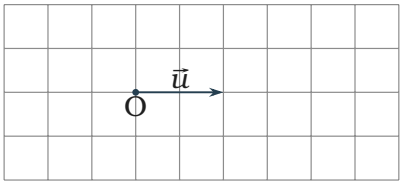
Στόχοι Συνδέω το $\lambda\vec{u}$ με τη φορά και το μέτρο του. Χρησιμοποιώ γραμμικούς συνδυασμούς και τη συνθήκη παραλληλίας. Ελέγχω αν τρία σημεία είναι συνευθειακά και εφαρμόζω τον τύπο του μέσου.

Σχολικό βιβλίο: παρ. 1.3. Σύντομες απαντήσεις εδώ, αναλυτικές λύσεις στο τετράδιο.

Πρόσημο και μέτρο

Άσκηση 1

Δίνεται $|\vec{u}| = 2$. Σχεδιάστε από το Ο τα $2\vec{u}$, $-\frac{1}{2}\vec{u}$, $0\vec{u}$ και συμπληρώστε τον πίνακα.



Διάνυσμα	Μέτρο	Φορά ως προς $\vec{u}$
$2\vec{u}$	.....	.....
$-\frac{1}{2}\vec{u}$	.....	.....
$0\vec{u}$	.....	.....

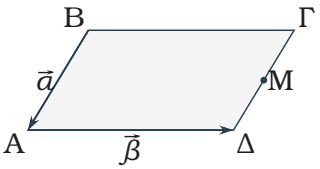
Για $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\lambda\vec{u}| =$ ..... $|\vec{u}|$. Έχει φορά το $0\vec{u}$;

Συζήτηση: Αν $|\vec{v}| = 2|\vec{u}|$, ισχύει αναγκαστικά $\vec{v} = 2\vec{u}$; Αιτιολογήστε.

Διαβάζω το σχήμα

Άσκηση 2

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{BA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$ και το Μ είναι μέσο του ΓΔ.



Εκφράστε με τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$:

$\overrightarrow{A\Gamma} =$ ..... $\overrightarrow{B\Delta} =$ .....

$\overrightarrow{\Gamma M} =$ ..... $\overrightarrow{\Delta M} =$ .....

$\overrightarrow{AM} =$ .....

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις για τα $\overrightarrow{\Gamma M}$ και $\overrightarrow{AM}$.

Για $\vec{v} \neq \vec{0}$: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Για τα διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει

$$2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Delta B} + 3\overrightarrow{\Delta\Gamma}.$$

α) Γράψτε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta}$ και δείξτε ότι $\overrightarrow{B\Delta} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Τι συμπεραίνετε για τη φορά και τα μέτρα των $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$; Είναι και αντίθετα; Αιτιολογήστε.

Σημείο αναφοράς Σημεία στην ίδια ευθεία

Άσκηση 4

Για Α ≠ Β και σημείο Ρ ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$.

α) Με σημείο αναφοράς το Α, να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

β) Αιτιολογήστε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Σχεδιάστε τη θέση του Γ και βρείτε τον λόγο $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}$.

Νικόλαος Δ. Κατσίπης
www.nikolaoskatsipis.gr

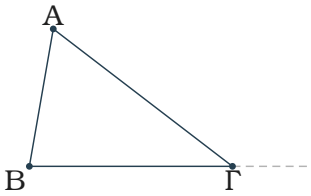
Σχήμα
Συνδυασμοί
Συμπέρασμα

Άσκηση 5

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται σημεία Δ, Ε, Ζ με

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}, \qquad \overrightarrow{AZ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

α) Σημειώστε τα Δ, Ε, Ζ στο σχήμα. Προσέξτε τη φορά του $\overrightarrow{\Gamma E}$.
β) Εκφράστε τα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
γ) Δείξτε ότι $\overrightarrow{\Delta E} = 2\overrightarrow{\Delta Z}$. Ποια είναι η θέση του Ζ στο τμήμα ΔΕ;



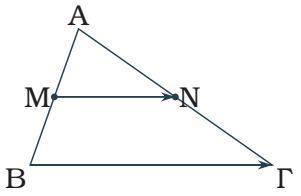
Τύπος μέσου
ως γραμμικός
συνδυασμός

Άσκηση 6

Τα Μ, Ν είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ο είναι οποιοδήποτε σημείο αναφοράς.

α) Με τον τύπο του μέσου του βιβλίου, συμπληρώστε:
$\overrightarrow{OM} = \ldots . \overrightarrow{OA} + \ldots . \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} = \ldots . \overrightarrow{OA} + \ldots . \overrightarrow{O\Gamma}$.

β) Από τη σχέση $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$.
γ) Συμπληρώστε: ΜΝ .... ΒΓ και ΜΝ = ... ΒΓ. Διατυπώστε με λόγια το γεωμετρικό θεώρημα.

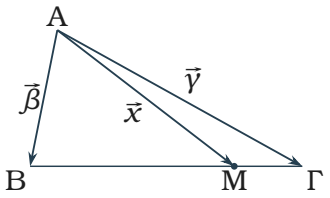


Λόγος μηκών
Γραμμικός
συνδυασμός
Θέση σημείου

Άσκηση 7

Στο τρίγωνο ΑΒΓ το Μ είναι εσωτερικό σημείο της ΒΓ με ΜΒ = 3ΜΓ. Θέτουμε $\vec{\beta} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, $\vec{x} = \overrightarrow{AM}$.

α) Συμπληρώστε: $\overrightarrow{BM} = \ldots . \overrightarrow{B\Gamma}$.
β) Χρησιμοποιήστε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, για να δείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{\beta} + \frac{3}{4}\vec{\gamma}$.



γ) Σημείο Ν ικανοποιεί τη σχέση $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\vec{\beta} + \frac{1}{4}\vec{\gamma}$. Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ν στην πλευρά ΒΓ και τον λόγο ΒΝ : ΝΓ.

«Ο καλύτερος τρόπος για να εκτιμήσει κανείς την αξία των μαθηματικών είναι να μελετήσει την ιστορία τους.»
Carl B. Boyer, 1906–1976, Αμερικανός μαθηματικός

Νικόλαος Δ. Κατσίπης
www.nikolaoskatsipis.gr