Πραγματικοί Αριθμοί

3ο φύλλο εργασίας

Διάταξη και διαστήματα

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Ημερομηνία: .....

Στόχοι Διερευνώ τις ιδιότητες των ανισοτήτων. Αιτιολογώ συγκρίσεις, εξετάζω την ισότητα και συνδέω ανισότητες, διαστήματα και άξονα.

Οι αναλυτικές λύσεις γράφονται στο τετράδιο.

$a > \beta$
$\Leftrightarrow a - \beta > 0.$

Άσκηση 1

Αν $a < 2$ και $\beta > 3$, να βρείτε και να αιτιολογήσετε τα πρόσημα:

α) $a - 2$, **β)** $\beta - 3$, **γ)** $(a-2)(\beta-3)$.

Πολλαπλασιασμός με γ.
Για $\gamma > 0$ η φορά διατηρείται.
Για $\gamma < 0$ η φορά αλλάζει.

Άσκηση 2

Να συμπληρώσετε με $<$ ή $>$ και να αναφέρετε την ιδιότητα.

α) $a < \beta \Leftrightarrow a - 2 \ \ldots \ \beta - 2$ **β)** $a < \beta \Leftrightarrow -2a \ \ldots \ -2\beta$

γ) Αν $a < 2$, $\beta < 4$, τότε $a + \beta \ \ldots \ 6$.

δ) Αν $a > 3$, $\beta > 2$, τότε $a\beta \ \ldots \ 6$.

ε) Αν $0 < a < \beta$, τότε $a^2 \ \ldots \ \beta^2$ και $\dfrac{1}{a} \ \ldots \ \dfrac{1}{\beta}$.

Για κάθε $u \in \mathbb{R}$:
$u^2 \geq 0$.
Ισότητα μόνο για $u = 0$.

Άσκηση 3

Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $a^2 + 1 \geq 2a$, **β)** $(a+\beta)^2 \geq 4a\beta$,

γ) $2(a^2 + \beta^2) \geq (a-\beta)^2$.

Πότε ισχύει ισότητα σε καθεμία από τις παραπάνω σχέσεις;

Αντιπαράδειγμα.
Ελέγχω τις προϋποθέσεις.

Άσκηση 4

Ισχύουν πάντα οι ισχυρισμοί; Να αιτιολογήσετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα.

α) Αν $a < \beta$, τότε $a^2 < \beta^2$.

β) Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $a - \gamma > \beta - \delta$.

γ) Αν $a > \beta > 0$, $\gamma > \delta > 0$, τότε $\dfrac{a}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\delta}$.

Πυκνότητα ρητών.
Αξιοποιώ τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Άσκηση 5

α) Να βρείτε δύο ρητούς μεταξύ 1,41 και 1,42.

β) Υπάρχει ο αμέσως επόμενος ρητός μετά τον 1,41; Να εξηγήσετε.

γ) Για $a, \beta \in \mathbb{Q}$ με $a < \beta$, να δείξετε ότι $a < \dfrac{a+\beta}{2} < \beta$. Πώς διαφέρει αυτή η ιδιότητα από τη διαδοχικότητα των ακεραίων;

Τράπεζα Θεμάτων 12922
Προσαρμογή.

Άσκηση 6

Δίνονται $A = a^2 + \beta^2$, $B = 2a\beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να συμπληρώσετε με «και» ή «ή» και να αιτιολογήσετε:
$A = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ..... $\beta = 0$, $A > 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ..... $\beta \neq 0$.

β) Να δείξετε ότι $A - B \geq 0$. **γ)** Πότε ισχύει $A = B$;

Τράπεζα Θεμάτων 13323

Άθροισμα μη αρνητικών όρων ισούται με μηδέν όταν όλοι οι όροι είναι μηδέν.

Άσκηση 7

Για $x, y \in \mathbb{R}$:

α) Να αποδείξετε ότι $(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$.

β) Να βρείτε τους x, y ώστε $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

Νικόλαος Δ. Κατσίπης
www.nikolaoskatsipis.gr

Τράπεζα Θεμάτων 14602

Άσκηση 8

Αν $0 < a < 1$:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < a^3 < a$.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $0,\ a,\ a^3,\ 1,\ \dfrac{1}{a}$.

Τράπεζα Θεμάτων 14475
Όρια παραστάσεων.

Άσκηση 9

Αν $2 \le a \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια των παραστάσεων **α)** $a + 2\beta$, **β)** $a - \beta$. Να αιτιολογήσετε κάθε αλλαγή φοράς.

Κλειστό άκρο: ανήκει.
Ανοικτό άκρο: δεν ανήκει.
Στα $\pm\infty$ βάζω παρένθεση.

Άσκηση 10

Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα.

Ανισότητα	Διάστημα	Άξονας
	$x \in [2, 5)$	
$-1 \le x \le 4$		
		
$x \ge 3$		

«Και»: τομή.
«Ή»: ένωση.

Άσκηση 11

Δίνονται οι ανισώσεις $-2x < 2$ και $2x \le 8$.

α) Να τις λύσετε και να γράψετε τα σύνολα λύσεων ως διαστήματα A, B.

β) Να βρείτε τα $A \cap B$, $A \cup B$ και να τα παραστήσετε στον άξονα.

γ) Ποιοι ακέραιοι ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις;

Τράπεζα Θεμάτων 14492
Από τη γεωμετρία στην ανισότητα.

Άσκηση 12

Ορθογώνιο έχει μήκος x εκ. και πλάτος y εκ., με $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$.

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η περίμετρός του.

β) Το x μειώνεται κατά 1 εκ. και το y τριπλασιάζεται. Να βρείτε τα όρια της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου.

Τράπεζα Θεμάτων 36899
Προαιρετική.
Το (γ) είναι προσθήκη.

Άσκηση 13

Για $a, \beta > 0$ να αποδείξετε ότι:

α) $a + \dfrac{4}{a} \ge 4$. **β)** $\left(a + \dfrac{4}{a}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \ge 16$.

γ) Πότε ισχύει ισότητα σε καθεμία από τις σχέσεις;

«Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.»
Arthur Cayley, 1821–1895, Άγγλος μαθηματικός